

Всероссийская олимпиада школьников по математике

11 класс, школьный этап, 2019/20 год

1. Параболы $y = x^2 + ax + b$ и $y = x^2 + cx + d$ пересекают ось Ox в точке $(2019; 0)$. Докажите, что если точки их вторичного пересечения с осью Ox расположены симметрично относительно начала координат, то и точки их пересечения с осью Oy расположены симметрично относительно начала координат.

2. Можно ли так раскрасить все натуральные числа в красный и синий цвета, чтобы любые два числа, отличающиеся на 5, были разных цветов, и любые два числа, отличающиеся в два раза, были разных цветов?

3. На плоскости даны квадрат и правильный треугольник такие, что площадь каждой из этих двух фигур численно равна периметру другой. Найдите сторону данного квадрата.

\square

4. У Малыша и Карлсона есть длинная шоколадка 15×100 . Они по очереди выедают из неё квадратные куски любого размера (куски можно выедасть только по линиям сетки). Начинает Карлсон. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

5. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Точка P — середина ребра AA_1 , точка Q — середина ребра CD , точка R — середина ребра $B_1 C_1$. Докажите, что $\angle P B_1 Q < \angle P R Q$.

6. Для положительных чисел a , b и c докажите неравенство

$$\frac{1+bc}{a} + \frac{1+ca}{b} + \frac{1+ab}{c} > \sqrt{a^2+2} + \sqrt{b^2+2} + \sqrt{c^2+2}.$$