# Всероссийская олимпиада школьников по математике

## 10 класс, региональный этап, 2019/20 год

**Первый день**

**1.** Найдите хотя бы одно четырёхзначное число, обладающее следующим свойством: если сумму всех цифр этого числа умножить на произведение всех его цифр, то в результате получится 3990.

**2.** Множество $A$ состоит из $n$ различных натуральных чисел, сумма которых равна $n^2$. Множество $B$ также состоит из $n$ различных натуральных чисел, сумма которых равна $n^2$. Докажите, что найдётся число, которое принадлежит как множеству $A$, так и множеству $B$.

**3.** Коля и Дима играют в игру на доске $8 \times 8$, делая ходы по очереди, начинает Коля. Коля рисует в клетках крестики, а Дима накрывает прямоугольниками $1 \times 2$ (*доминошками*) пары сосед- них по стороне клеток доски. За свой ход Коля должен поставить один крестик в любую пустую клетку (т. е. в клетку, в которой ещё не нарисован крестик и которая ещё не покрыта доминошкой). Дима за свой ход должен накрыть доминошкой две клетки (ещё не накрытые другими доминошками), в которых суммарно чётное число крестиков (0 или 2). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

**4.** Пусть $p$ — простое число, большее 3. Докажите, что найдётся натуральное число $y$, меньшее $p/2$ и такое, что число $py + 1$ невозможно представить в виде произведения двух целых чисел, каждое из которых больше $y$.

**5.** Четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности $\omega$. Докажите, что диаметр окружности $\omega$ не превосходит длины отрезка, соединяющего середины сторон $BC$ и $AD$.

**Второй день**

**6.** На доске написано выражение $\cos x$. Разрешается сложить или перемножить несколько написанных на доске выражений (одно выражение может использоваться несколько раз) и дописать полученное новое выражение на доску. Можно ли за несколько действий получить выражение, которое при $x = \pi$ принимает значение 0?

**7.** На сторонах выпуклого четырёхугольника $ABCD$ во внешнюю сторону построены прямоугольники. Оказалось, что все вершины этих прямоугольников, отличные от точек $A$, $B$, $C$, $D$, лежат на одной окружности. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — вписанный.

**8.** На доске пишут $n$ квадратных трёхчленов вида $*x^2+*x+*$ (вместо коэффициентов написаны звёздочки). Можно ли при каком-либо $n > 100$ поставить вместо $3n$ звёздочек некоторые $3n$ последовательных натуральных чисел (в каком-то порядке) так, чтобы каждый из $n$ данных трёхчленов имел два различных целых корня?

**9.** Назовём многоугольник *хорошим*, если у него найдётся пара параллельных сторон. Некоторый правильный многоугольник разрезали непересекающимися (по внутренним точкам) диагоналями на несколько многоугольников так, что у всех этих многоугольников одно и то же нечётное количество сторон. Может ли оказаться, что среди этих многоугольников есть хотя бы один хороший?

**10.** Петя задумал два многочлена $f(x)$ и $g(x)$, каждый вида $ax^2 + bx + c$ (т. е. степень каждого многочлена не превышает 2). За ход Вася называет Пете число $t$, а Петя сообщает ему (по своему усмотрению) одно из значений $f(t)$ или $g(t)$ (не уточняя, какое именно он сообщил). После $n$ ходов Вася должен определить один из петиных многочленов. При каком наименьшем $n$ у Васи есть стратегия, позволяющая гарантированно этого добиться?