Всероссийская олимпиада школьников по математике

11 класс, заключительный этап, 2018/19 год

Первый день

1. В каждой точке A плоскости стоит вещественное число $f(A)$. Известно, что если M — точка пересечения медиан треугольника ABC, то $f(M) = f(A)+f(B)+f(C)$. Докажите, что $f(A) = 0$ для всех точек A.

2. Верно ли, что при любых ненулевых целых числах a и b система

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(13x)\operatorname{tg}(ay) = 1, \\ \operatorname{tg}(21x)\operatorname{tg}(by) = 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

3. Даны n монет попарно различных масс и n чашечных весов, $n > 2$. При каждом взвешивании разрешается выбрать какие-то одни весы, положить на их чаши по одной монете, посмотреть на показания весов и затем снять монеты обратно. Какие-то одни из весов (неизвестно, какие) испорчены и могут выдавать случайным образом как правильный, так и неправильный результат. За какое наименьшее количество взвешиваний можно заведомо найти самую тяжёлую монету?

4. Дана треугольная пирамида $ABCD$. Сфера ω_A касается грани BCD, а также плоскостей остальных граней вне самих граней. Аналогично, сфера ω_B касается грани ACD, а также плоскостей остальных граней вне самих граней. Пусть K точка касания сферы ω_A с плоскостью ACD, а L точка касания сферы ω_B с плоскостью BCD. На продолжениях отрезков AK и BL за точки K и L выбраны точки X и Y соответственно так, что $\angle CKD = \angle CXD + \angle CBD$ и $\angle CLD = \angle CYD + \angle CAD$. Докажите, что точки X и Y равноудалены от середины отрезка CD.

Второй день

5. Радиусы пяти концентрических окружностей ω_0, ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию со знаменателем q. При каком наибольшем q можно нарисовать незамкнутую ломаную $A_0A_1A_2A_3A_4$, состоящую из четырёх отрезков равной длины, в которой A_i лежит на ω_i при всех $i = 0, 1, 2, 3, 4$?

6. На стороне AC равнобедренного треугольника ABC с основанием BC взята точка D. На меньшей дуге CD окружности, описанной около треугольника BCD, выбрана точка K. Луч CK пересекает прямую, параллельную BC и проходящую через A, в точке T. Пусть M — середина отрезка DT. Докажите, что $\angle AKT = \angle CAM$.

7. Даны непостоянный многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами и натуральное число n. Положим $a_0 = n$, $a_k = P(a_{k-1})$ при всех натуральных k. Оказалось, что для любого натурального b в последовательности a_0, a_1, a_2, $\ldots$ есть число, являющееся b-й степенью натурального числа, большего 1. Докажите, что многочлен $P(x)$ — линейный.

8. Дано натуральное n. Из 26 единичных белых кубиков и одного чёрного кубика собирается куб $3 \times 3 \times 3$ так, что чёрный кубик находится в его центре. Из n^3 таких кубов с ребром 3 составили куб с ребром $3n$. Какое наименьшее количество белых кубиков можно перекрасить в красный цвет так, чтобы каждый белый кубик имел хотя бы одну общую вершину с каким-нибудь красным?