Всероссийская олимпиада школьников по математике

10 класс, заключительный этап, 2018/19 год

Первый день

1. В каждой точке A плоскости стоит вещественное число $f(A)$. Известно, что если M — точка пересечения медиан треугольника ABC, то $f(M) = f(A)+f(B)+f(C)$. Докажите, что $f(A) = 0$ для всех точек A.

2. Паша и Вова играют в следующую игру, делая ходы по очереди. Начинает Паша. Изначально перед мальчиками лежит большой кусок пластилина. За один ход Паша может разрезать любой из имеющихся кусков пластилина на три части (не обязательно равные). Вова своим ходом выбирает два куска и слепляет их вместе. Паша побеждает, если в некоторый момент среди имеющихся кусков пластилина окажется 100 кусков одинаковой массы. Может ли Вова помешать Паше победить?

3. В межгалактической гостинице есть 100 комнат вместимостью 101, 102, ..., 200 человек. В этих комнатах суммарно живёт n человек. В гостиницу приехал VIP-гость, для которого нужно освободить целую комнату. Для этого директор гостиницы выбирает одну комнату и переселяет всех её жителей в одну и ту же другую комнату. При каком наибольшем n директор гостиницы всегда может таким образом освободить комнату независимо от текущего расселения?

4. Дан остроугольный треугольник ABC , в котором $AC < BC$. Окружность проходит через точки A и B и пересекает отрезки CA и CB повторно в точках A_1 и B_1 соответственно. Описанные окружности треугольников ABC и A_1B_1C пересекаются повторно в точке P. Отрезки AB_1 и BA_1 пересекаются в точке S. Точки Q и R симметричны S относительно прямых CA и CB. Докажите, что точки P, Q, R и C лежат на одной окружности.

Второй день

5. В детском саду воспитательница взяла $n > 1$ одинаковых картонных прямоугольников и раздала их n детям, каждому по прямоугольнику. Каждый ребёнок разрезал свой прямоугольник на несколько одинаковых квадратиков (квадратики у разных детей могли быть разными). Оказалось, что общее количество квадратиков — простое число. Докажите, что исходные прямоугольники были квадратами.

6. В остроугольном треугольнике ABC проведена биссектриса BL. Точки D и E — соответственно середины меньших дуг AB и BC окружности ω, описанной около треугольника ABC. На продолжении отрезка BD за точку D отмечена точка P, а на продолжении отрезка BE за точку E — точка Q так, что $\angle APB = \angle CQB = 90°$. Докажите, что середина отрезка BL лежит на прямой PQ.

7. В математическом кружке занимаются 24 школьника. Каждую команду, состоящую из 6 школьников, руководитель считает либо *сыгранной*, либо *не сыгранной*. Для турнира математических боёв руководитель собирается разбить детей на 4 команды по 6 человек. Может ли оказаться, что при любом разбиении школьников на 4 команды сыгранными оказываются либо ровно три команды, либо ровно одна, причём и тот, и другой варианты присутствуют?

8. Даны непостоянный многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами и натуральное число n. Положим $a_0 = n$, $a_k = P(a_{k-1})$ при всех натуральных k. Оказалось, что для любого натурального b в последовательности $a_0, a_1, a_2, \ldots$ есть число, являющееся b-й степенью натурального числа, большего 1. Докажите, что многочлен $P(x)$ — линейный.