Олимпиада «Шаг в будущее» по математике

10 класс, 2024 год

1. Имеется шесть карточек с буквами С, О, Б, А, К, И. Сколькими способами можно расположить все карточки в ряд так, чтобы не было трех согласных подряд и не было трех гласных подряд?

$\boxed{504}$

2. Пусть x, y, z — корни многочлена $P(t) = t^3 - 3t - 1$. Найдите $x^7 + y^7 + z^7$.

$\boxed{63}$

3. В треугольнике ABC угол B равен $60°$, отрезок CH — высота. Окружность с центром в точке O_1 и радиусом $R = \frac{\sqrt{39}}{3}$ описана около треугольника ABC. В треугольник BCH вписана окружность с центром в точке O_2 и радиусом $r = \sqrt{3} - 1$. Найдите длину O_1O_2.

$\boxed{\sqrt{\frac{19-10\sqrt{3}}{3}},\ \sqrt{\frac{31-14\sqrt{3}}{3}}}$

4. Найдите все значения x, для которых неравенство

$$\sqrt{2x^2 + 8x + a} > ax^2 + (1-a)(2x-1) - 15$$

верно для любого $a \in [-2; 0]$.

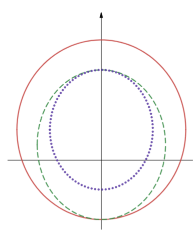
$\boxed{x \in \left(-\infty; -2-\sqrt{5}\right] \cup \left[2+\sqrt{5}; 32\right)}$

5. Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ является параллелограмм $ABCD$ со сторонами $AB = 7$, $BC = 3\sqrt{7}$ и углом A, равным $60°$. Высотой пирамиды $SABCD$ является отрезок SO, где O — точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$. Найдите площадь сечения пирамиды $SABCD$ плоскостью, параллельной диагонали основания BD и проходящей через середину ребра SC и точку P, лежащую на высоте пирамиды SO, причем $SP = 2PO$, если расстояние от точки S до плоскости сечения равно $3\sqrt{3}/2$.

$\boxed{10{,}5}$

6. За время освоения космического пространства на различных орбитах скопились сотни тысяч объектов космического мусора. Дальнейшее использование космического пространства может быть существенно осложнено возрастающей угрозой столкновения с этим мусором. Согласно результатам исследований удаление $3-5$ крупных объектов в год с низких околоземных орбит позволяет предотвратить цепную реакцию роста объектов космического мусора в будущем. На данный момент работающей технологией по утилизации космического мусора является увод старых спутников. Это можно сделать с помощью аппаратов-захватчиков, которые буксируют мусор на орбиты для захоронения.

Рассмотрим плоскость орбиты захоронения. Пусть крупный фрагмент мусора движется в этой плоскости по эллиптической орбите с большой полуосью, равной 9000 км. (Для удобства вычислений все расчеты будем производить в тысячах километров.) Пусть уравнение траектории движения обломка задано следующим образом: $81x^2 + 65(y-4)^2 = 5265$.



На некотором удалении от указанной орбиты находится космическая научная станция, уравнение движения которой $36x^2 + 20(y-4)^2 = 720$. С нее стартует летательный аппарат, который движется по переходной эллиптической траектории: $\frac{x^2}{25} + \frac{(y-y_0)^2}{z^2} = 1$. Он должен совершить манёвр по переходу с одной орбиты на другую и плавно подойти к обломку для изменения его скорости и направления движения.

Известно, что скорость движения по эллиптической орбите вида $\frac{x^2}{b^2} + \frac{(y-c)^2}{a^2} = 1$, $a \geqslant b$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, с большой полуосью, равной a, вычисляется по формуле

$$V = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)},$$

$\mu \approx 3{,}9 \cdot 10^5$ км^3/с^2 — гравитационный потенциал Земли, r — расстояние от начала координат, расположенного в одном из фокусов эллипса, до движущейся точки.

Найдите максимальную скорость движения осколков космического мусора на указанной орбите. Определите параметры z, y_0 , если известно, что переходная траектория должна проходить через точку, в которой скорость движения обломков максимальна и проходить через точку орбиты научной станции, в которой скорость движения станции минимальна. Выпишите уравнение переходной орбиты.

$\boxed{10{,}6;\ 7{,}5;\ 2{,}5;\ \frac{x^2}{5^2} + \frac{(y-5/2)^2}{(15/2)^2} = 1}$