

Олимпиада «Шаг в будущее» по математике

9 класс, 2023 год

1. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{1+x}-2}{1-\sqrt{x+2}} \geq 1 + \sqrt{x+2}.$$

2. В параллелограмме $ABCD$ точка E делит пополам сторону CD , биссектриса угла ABC пересекает в точке O отрезок AE . Найдите площадь четырёхугольника $OBCE$, зная, что $AD = 12$, $DE = 4$, $\angle ABO = 60^\circ$.

3. На беговой дорожке стадиона длиной 400 м одновременно со старта в одном направлении начали забег два спортсмена на дистанцию 10 км. Каждый из них бежал со своей постоянной скоростью. Первый спортсмен пришел на финиш на 16 мин 40 с раньше второго и через 43 мин 20 с после того, как он второй раз на дистанции (не считая момента старта) обогнал второго спортсмена. Известно, что скорость первого спортсмена больше 100 м/мин. Сколько раз первый спортсмен обогнал второго на дистанции после старта?

4. Найти все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^3 - (a+3)x^2 + (3a+2)x - 2a \geq 0, \\ x^3 - (a+3)x^2 + 3ax \leq 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

5. В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) на стороне BC выбирается точка N так, что окружность, вписанная в треугольник ACN , касается стороны AN в точке K и $\angle CDK = 18^\circ$, где точка D — середина AB . Найдите величину $\angle CAN$.

6. На складе находятся товары общей массой 1300 тонн, которые размещены в различные контейнеры. Вес каждого такого контейнера не более 10 тонн. Эти контейнеры грузят в железнодорожные вагоны, вместимость которых не более 60 тонн. Для вывоза товара со склада необходимо сформировать железнодорожный поезд. Какое наименьшее количество вагонов должно быть в этом поезде, чтобы гарантированно вывезти весь товар со склада за один раз? (Размеры контейнеров не учитывать.)