

Олимпиада «Шаг в будущее» по математике

10 класс, 2023 год, вариант 2

1. Игральный кубик подбрасывают дважды, при этом вычисляют и записывают сумму выпавших очков. Такую процедуру повторяют три раза (всего совершают шесть подбрасываний). Найдите вероятность того, что только одна из трех записанных сумм кратна трем.

2. Найдите наименьшее натуральное число m , при котором выражение $148^n + m \cdot 141^n$ делится на 2023 при любом нечетном натуральном n .

3. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1 , BB_1 , CC_1 , L — точка пересечения отрезков B_1C_1 и AA_1 , K — точка пересечения отрезков B_1A_1 и CC_1 , M — точка пересечения BK и AA_1 , N — точка пересечения BL и CC_1 . Найдите отношение $MS : SN$, если S — точка пересечения биссектрисы BB_1 с отрезком MN , и $AB : BC : AC = 2 : 3 : 4$.

4. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

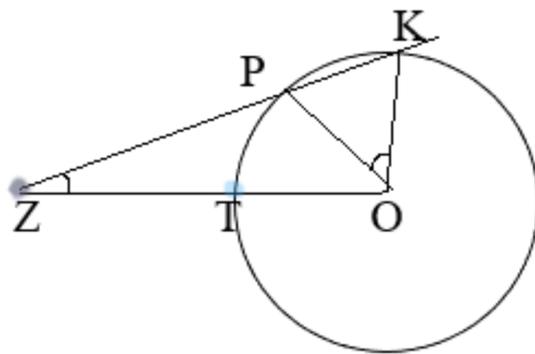
$$|2 + |x| - a| - |a - |x + 1| - |x - 1|| = 2 + |x| + |x + 1| + |x - 1| - 2a$$

имеет ровно два целых решения. Укажите эти решения при каждом из найденных a .

5. Сечение правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ образовано плоскостью, проходящей через вершину C основания $ABCDEF$ и параллельной медиане BM боковой грани SAB и апофеме SN боковой грани SAF , сторона основания пирамиды равна 2, а расстояние от вершины S до секущей плоскости равно 1. Найдите косинус угла между плоскостью сечения и плоскостью основания.

6. Астрономы обнаружили за планетой Сатурн новое небесное тело, движущееся по круговой орбите, для изучения которого был направлен научно-исследовательский зонд — автономный робот, оснащенный ракетными двигателями, собственной энергетической установкой, системами радиосвязи и навигации, научными приборами, фото- и видеотехникой. И все это управляется бортовыми компьютерами. Для изучения найденного объекта было принято решение произвести фотосъемку в двух точках его орбиты. После съемок в первой точке, потребовалось скорректировать скорость движения зонда, чтобы иметь возможность сделать еще один фотоснимок небесного тела в другой точке его орбиты.

Рассмотрим упрощенную модель возникшей ситуации. Считаем изучаемый объект (небесное тело) и исследовательский зонд материальными точками, небесное тело движется по круговой орбите с центром в точке O и радиусом $R = 1,2 \cdot 10^6$ км с постоянной угловой скоростью $\omega = 0,25 \cdot 10^{-5}$ рад/с. Проекцию зонда на плоскость орбиты назовем подзондовой точкой. Скорость движения подзондовой точки постоянна и равна V_1 , а ее траекторию в плоскости орбиты условно считаем прямой, пересекающей окружность в точках P и K . Согласно заложенной программе, съемка небесного тела зондом осуществляется в моменты их наибольшего сближения, которые соответствуют моментам пересечения траектории подзондовой точки с орбитой тела (точки P и K). Когда небесное тело (точка T) оказывается строго на прямой между точкой O и подзондовой точкой (точка Z), запускается таймер ($t_0 = 0$). В точке P небесное тело и подзондовая точка находятся в одно и тоже время, и осуществляется съемка, после чего скорость зонда меняется так, чтобы над точкой K вновь оказаться одновременно с телом для его повторного фотографирования. Скорость подзондовой точки на участке PK постоянна.



Определите расстояние между подзондовой точкой и изучаемым телом в начальный момент времени t_0 , а также скорость подзондовой точки V_2 на участке PK , если центральный угол POK равен углу PZO и в полтора раза меньше центрального угла POT . В расчетах используйте приближенное значение числа π — округлите его до целого значения.