

Олимпиада «Шаг в будущее» по математике

10 класс, 2023 год, вариант 1

1. В кружке «Неумелые руки» методом тяп-ляп изготовили несбалансированные рычажные весы с плечами разной длины и чашами с разным собственным весом. В результате четырех взвешиваний на этих весах были получены следующие «равновесия»:

$$\begin{array}{ll} \text{[слева 3 кг = справа дыня];} & \text{[слева дыня = справа 5,5 кг];} \\ \text{[слева 5 кг = справа арбуз];} & \text{[слева арбуз = справа 10 кг].} \end{array}$$

Каков истинный вес (масса) дыни и арбуза?

2. Какое максимальное возможное количество идущих подряд членов возрастающей геометрической прогрессии могут быть 3-значными натуральными числами? Приведите пример такой последовательности.

3. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1 , BB_1 , CC_1 , L — точка пересечения отрезков B_1C_1 и AA_1 , K — точка пересечения отрезков B_1A_1 и CC_1 . Найдите отношение $LM : MK$, если M — точка пересечения биссектрисы BB_1 с отрезком LK , и $AB : BC : AC = 2 : 3 : 4$.

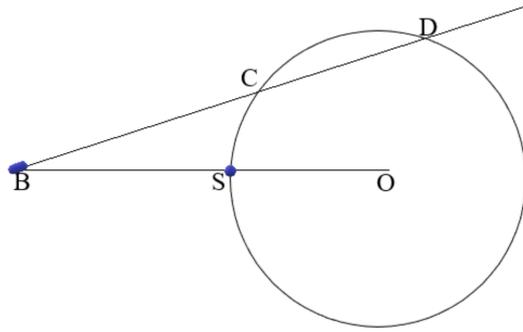
4. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$|a - 3|x + 0,5| + x + 2,5| + |a - x^2| = x^2 + x - 3|x + 0,5| + 2,5$$

имеет ровно два целых решения.

5. Сечение правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ образовано плоскостью, проходящей через центр основания $ABCDEF$ и параллельной медиане CM боковой грани SCD и апофеме SN боковой грани SAF , сторона основания пирамиды равна 8, а расстояние от вершины S до секущей плоскости равно $3\sqrt{13/7}$. Найдите косинус угла между плоскостью сечения и плоскостью основания.

6. Для получения фотоснимков небесных тел используются космические зонды — автономные роботы, оснащенные ракетными двигателями, собственными энергетическими установками, системами радиосвязи и навигации, научными приборами. И все это управляется бортовыми компьютерами. Например, благодаря таким зондам успешно выполнена программа исследования Сатурна и его крупнейшего спутника Титана, удивительно похожего на Землю. При изучении одного из спутников Сатурна с радиусом орбиты $R \approx 1,2 \cdot 10^5$ км возникла нештатная ситуация: при пролете зонда сквозь плоскость колец Сатурна бортовая поворотная платформа с телекамерами была заклинена частицами этих колец. В результате смогли получить четкие снимки только одной стороны спутника. Для получения снимков обратной стороны спутника было принято решение продолжить полет зонда и встретить спутник в другой точке пространства, для чего пришлось скорректировать скорость движения зонда.



Рассмотрим упрощенную модель возникшей ситуации. Траекторию движения спутника (орбиту) вокруг Сатурна (точка O) считаем круговой с радиусом $R = 1,2 \cdot 10^5$ км, скорость движения спутника постоянна и равна $V_T = 3,27$ км/с. Проекцию зонда на плоскость орбиты назовем подзондовой точкой. Скорость движения подзондовой точки постоянна и равна $V_1 = 6$ км/с, а ее траекторию в плоскости орбиты условно считаем прямой, пересекающей окружность в точках C и D . Согласно заложенной программе, съемка поверхности спутника зондом осуществляется в моменты их наибольшего сближения, которые соответствуют моментам пересечения траектории подзондовой точки с орбитой спутника (точки C и D). Когда спутник (точка S) оказывается строго на прямой между центром Сатурна (точка O) и подзондовой точкой (точка B), запускается таймер ($t_0 = 0$). При этом спутник и подзондовая точка встречаются в точке C через время $t = 2 \cdot 10^4$ с. После съемки над точкой C скорость зонда меняется так, чтобы над точкой D оказаться одновременно со спутником для фотографирования его обратной стороны. Скорость подзондовой точки на участке CD постоянна.

Определите расстояние между подзондовой точкой и спутником (считая его материальной точкой) в начальный момент времени t_0 , а также скорость подзондовой точки V_2 на участке CD . В расчетах используйте приближенные значения скорости спутника и числа π — округлите их до целых значений.