

Олимпиада «Шаг в будущее» по математике

8 класс, 2022 год, вариант 1

1. Найдите все значения параметра a , при которых выполнено $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = 2$, где x_1, x_2 — корни уравнения $2x^2 - (a + 2)x - 2a - 4 = 0$.

2. Найдите все значения x и y , при которых выполнены оба уравнения

$$\begin{cases} x\sqrt{2\sqrt{2} + 2\sqrt{6} + 9 + 4\sqrt{3}} - 2y = y\sqrt{(1 - \sqrt{6} - \sqrt{2})^2}, \\ xy = 6 + 2x - 3y. \end{cases}$$

3. В трапеции $ABCD$ $AD \parallel BC$, $AD = 2BC$. Точка E принадлежит AB так, что $AB \perp DE$. Найти площадь $\triangle ECD$, если $ED = 6$, $CD = 5$.

4. При каких значениях параметра a уравнение $f(x) = a$ имеет единственное решение, если известно, что

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}, & \text{если } x \in [0; 5]; \\ x^2 - 2, & \text{если } x \in (-3; 0); \\ 3x + 16, & \text{если } x \in (-4; -3]? \end{cases}$$

5. В равнобедренном $\triangle ABC$ с основанием BC проведена прямая, пересекающая сторону AB в точке B_1 , сторону BC в точке A_1 , а продолжение стороны AC за точку C в точке C_1 так, что $\triangle BA_1C_1$ равнобедренный с основанием BC_1 . $\angle A_1BC_1 = \frac{1}{2}\angle ABC$, $3AB = 2BC$, $C_1A_1 \cap AB = B_1$. Найти отношение площади $\triangle AB_1A_1$ к площади $\triangle CA_1C_1$.

6. Тренер детской команды сноубордистов взял на соревнование два вида твердых парафинов для обеспечения хорошего сцепления и легкого скольжения. Это бруски одинаковой длины, но разной контактной площади. По опыту прошлых соревнований тренер знает, что бруска с большей контактной площадью хватает на три часа непрерывной работы. На этот раз тренер решил взять помощника. Они вместе начали работать разными брусками-парафинами и к концу соревнования от большего бруска остался вдвое больший кусок, чем от меньшего. На сколько часов рассчитан брусок меньшей контактной площади, если соревнование длилось 2 часа?