

Олимпиада «Шаг в будущее» по математике

11 класс, 2022 год, вариант 2

1. Дробь $1/9$ записана в виде бесконечной двоичной дроби. Сколько единиц среди первых 2022 цифр после запятой содержится в такой форме записи?

2. Имеется куб, зафиксированный на ножках, и шесть различных красок. Сколькими способами можно покрасить все грани куба (каждую в один цвет, все краски использовать не обязательно) так, чтобы соседние грани (имеющие общее ребро) были разного цвета?

3. Точка M принадлежит катету AC прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C , причем $AM = 2$, $MC = 16$. Отрезок MH — высота треугольника AMB . Точка D расположена на прямой MH так, что угол ADB равен 90° , и точки C и D лежат по одну сторону от прямой AB . Найдите длину отрезка BL , если L — точка пересечения BD и AC , а тангенс угла ACH равен $1/18$.

4. Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} (a|\operatorname{tg}^3 y| + a|\operatorname{ctg}^3 x| - 8)(\operatorname{ctg}^6 x + \operatorname{tg}^6 y - 3a^2) = 0, \\ \sqrt{(\operatorname{ctg}^6 x)(\operatorname{tg}^6 y)} = a \end{cases}$$

имеет не более двенадцати различных решений при $x \in (0, \pi)$ и $y \in (-\pi/2, \pi/2)$.

5. Внутри правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ расположена правильная четырехугольная призма $KLMNK_1L_1M_1N_1$, основание $KLMN$ которой лежит в плоскости ABC . Центр основания $KLMN$ призмы расположен на отрезке AC , $KL \parallel AC$, $KN \parallel BD$ (точки K и B лежат по одну сторону от AC), сторона основания призмы равна 2, боковое ребро KK_1 призмы равно 3. Вершины L_1 и M_1 верхнего основания призмы $KLMNK_1L_1M_1N_1$ принадлежат боковым граням SBC и SCD пирамиды $SABCD$ соответственно. Плоскость γ проходит через прямую BD и точку L_1 . Найдите объемы частей, на которые делит пирамиду $SABCD$ плоскость γ , если сторона пирамиды равна $8\sqrt{2}$, а её высота равна 12.

6. Современную жизнь невозможно представить без спутниковой связи и навигации. В 2022 году только тремя ведущими космическими державами произведено 126 успешных запусков спутников. По данным прикладного потребительского центра ГЛОНАСС в настоящее время в составе системы ГЛОНАСС задействовано 25 спутников, в системах GPS — 32, ГАЛИЛЕО — 26, БЕЙДОУ — 49 спутников. Возникает проблема безопасности их полетов.

а) Считая Землю шаром радиуса R , определите, какое наибольшее количество спутников может одновременно находиться на орбитах вокруг Земли на одной и той же высоте H от ее поверхности так, чтобы расстояние между аппаратами было не меньше $\sqrt{2}(R + H)$.

б) Для найденного максимального количества спутников указать координаты возможного их расположения в системе координат с началом в центре Земли и осью абсцисс, направленной вдоль вектора, соединяющего центр Земли с одним из спутников.