

Олимпиада «Шаг в будущее» по математике

11 класс, 2022 год, вариант 1

1. Числа u, v, w являются корнями уравнения $x^3 - 3x - 1 = 0$. Найдите $u^9 + v^9 + w^9$.

2. В лаборатории имеются колбы двух размеров (объемом V и объемом $V/2$) в суммарном количестве 100 штук, причем колб каждого размера не менее трех. Лаборант поочередно случайно выбирает три колбы, и первую из них полностью заполняет 80-процентным раствором соли, вторую полностью заполняет 50-процентным раствором соли, а третью колбу полностью заполняет 20-процентным раствором соли. Затем он сливает содержимое этих трех колб в одну чашу и определяет процентное содержание соли в ней. При каком наименьшем количестве больших колб N событие «процентное содержание соли в чаше находится в пределах от 45% до 55% включительно» будет случаться реже события «при случайном бросании двух симметричных монет выпадает орел и решка (в любом порядке)»? Ответ обосновать.

3. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ длины сторон AB и BC равны, DB — биссектриса угла ADC , $AD : DC = 4 : 3$. Найдите косинус угла AKB , если K — точка пересечения диагоналей AC и BD , и $BK : KD = 1 : 3$.

4. Найдите все значения параметра a , при которых система

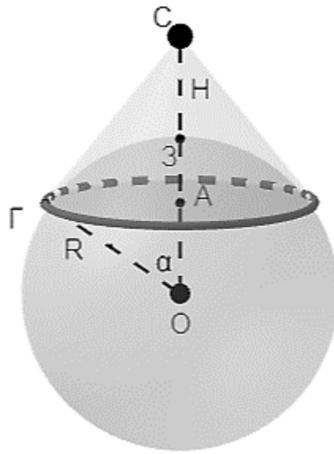
$$\begin{cases} (ay - ax + 2)(4y - 3|x - a| - x + 5a) = 0, \\ (\log_a x^2 + \log_a y^2 - 2) \log_2 a^2 = 8 \end{cases}$$

имеет шесть различных решений.

5. Шар радиуса $4/9$ лежит внутри правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ со стороной основания 8 и высотой 3. Этот шар касается плоскости основания $ABCD$ пирамиды и боковых граней SBC и SCD . Плоскость γ касается шара, проходит через точку B , середину K ребра CD и пересекает ребро SC в точке M . Найдите объем пирамиды $MBSK$.

6. В 2022 году исполняется 65 лет запуска первого искусственного спутника Земли (ИСЗ). В настоящее время для обеспечения бесперебойной работы сотовой связи, систем теле и радиовещания используются различные виды спутников, находящихся на различных орбитах, на различных высотах.

Зоной покрытия спутника назовем часть поверхности земного шара, в пределах которой обеспечивается уровень сигналов к спутнику и от него, необходимый для их приема с заданным качеством в конкретный момент времени. Как правило, эта часть поверхности ограничивается окружностью, проходящей по линии видимого горизонта. На рисунке — линия проходит через точку Γ .



а) Определите площадь земной поверхности (в км²), которая является зоной покрытия спутника, находящегося на высоте $H = 500$ км относительно земной поверхности, считая ее сферой радиуса $R = 6400$ км с центром в точке O .

б) Найдите все значения $n > 1$, для которых на поверхности земли можно расположить окружности C_1, \dots, C_n , каждая из которых внешним образом касается окружности C_0 , с центром в точке A и радиусом $r < R$, каждая из них является границей зоны покрытия ИСЗ, находящегося на той же высоте H , что и спутник с зоной покрытия C_0 . Каждая из зон покрытия C_i должна внешним образом касаться окружностей C_0 и C_{i+1} , $i = 0, 1, \dots, n - 1$, т. е. первая касается C_0 и C_2 , вторая — C_0 и C_3 , и т. д. Окружность C_n должна касаться C_0 и C_1 .