

## Олимпиада «Шаг в будущее» по математике

## 11 класс, 2021 год, вариант 2

1. Функция  $f(x)$  при всех действительных  $x \neq 1$  удовлетворяет соотношению

$$(x-1)f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + 4f(x) + 14x = 0.$$

Решите уравнение  $4 \cdot 8^x = 7 + 2^{f(x)}$ .

2. Найдите наибольшее натуральное число  $n$ , для которого верно неравенство

$$(1^3 + 2^3 + \dots + n^3) - 106(1 + 2 + \dots + n) + 105 \leq 0.$$

3. На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  отмечена точка  $K$  так, что  $AK = 9\sqrt{2}/2$ ,  $BK = 9$ ,  $KC = 3$ . Около треугольника  $ABK$  описана окружность. Через точку  $C$  и точку  $D$ , лежащую на стороне  $AB$ , проведена прямая, которая пересекает окружность в точке  $P$ , причем  $CP > CD$ . Найдите  $DP$ , если  $\angle APB = \angle BAC$ ,  $CD$  — биссектриса треугольника  $ABC$ .

4. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых система

$$\begin{cases} 7a - 30 \cos t + 3 \leq 0, \\ 5 \sin t + a + \frac{1}{2} + \frac{|\cos t|}{2 \cos t} + \frac{|5 \cos t - 4|}{5 \cos t - 4} = 0 \end{cases}$$

имеет решения. Укажите эти решения при найденных значениях параметра  $a$ .

5. Основанием пирамиды  $SABC$  служит прямоугольный треугольник  $ABC$  с катетами  $AB = 2$  и  $BC = 6$ . Высотой пирамиды  $SABC$  является отрезок  $SD$ , где точка  $D$  симметрична точке  $B$  относительно середины отрезка  $AC$ . Точка  $M$  принадлежит боковому ребру  $SB$ , причем  $SM = 2MB$ . Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через  $D$  параллельно гипотенузе основания  $AC$  и отрезку  $AM$ , если расстояние от точки  $B$  до секущей плоскости равно  $\sqrt{14}$ .

6. Искусственный спутник (ИСЗ) движется по круговой орбите вокруг Земли (имеет форму шара) на высоте  $H$ , равной радиусу Земли  $R = 6372$  км, с периодом обращения  $T = 4$  ч и постоянной угловой скоростью  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ . Для того, чтобы можно было наблюдать за спутником с поверхности Земли, он должен находиться выше плоскости горизонта. Определите: а) продолжительность наблюдения за спутником (в минутах) от момента его появления над горизонтом до момента захода за горизонт, если траектория ИСЗ проходит ровно над головой наблюдателя; б) плоский угол при вершине конуса обзора поверхности Земли с ИСЗ (в градусах).