

Олимпиада «Шаг в будущее» по математике

11 класс, 2021 год, вариант 1

1. Число b таково, что неравенство $\frac{a_1}{2a_2^2} + \frac{16a_3^4}{a_4^6} \geq b$ выполняется для всех натуральных чисел a_1, a_2, a_3, a_4 , удовлетворяющих неравенствам $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq 100$. Найдите наибольшее значение b .
2. Числовая последовательность a_0, a_1, a_2, \dots такова, что при всех целых неотрицательных числах m и n ($m \geq n$) выполняется соотношение $a_{m+n} + a_{m-n} = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_{2n})$. Найдите a_{2021} , если $a_1 = 1$.
3. Дан треугольник ABC с углом B , равным 60° . На продолжениях сторон AB, CB и медианы BM за точку B взяты точки K, L, N соответственно так, что $BK : AB = 3 : 1$, $BL : CB = 5 : 1$, $BN : BM = 4 : 1$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC , если площадь треугольника KLN равна $6\sqrt{3}$, а расстояние от точки M до точки касания вписанной в треугольник ABC окружности со стороной AC равно 1.
4. Найдите все значения параметра a , при которых неравенство

$$3\sqrt[3]{\log_x^7 2} + 6\sqrt[3]{\log_x^4 2} + a^2 \leq a \log_x^2 2 + 2a \log_x 2 + 3a\sqrt[3]{\log_x 2}$$

не выполняется ни для одного x из интервала $(1; 2)$. Укажите решения неравенства при найденных значениях параметра a .

5. На боковых ребрах TA, TB, TC правильной треугольной пирамиды $TABC$ соответственно выбраны точки A_1, B_1, C_1 так, что $\frac{TA}{TA_1} = \frac{TB}{TB_1} = \frac{TC}{TC_1} = 3$. Точка O — центр сферы, описанной около пирамиды $TABC_1$. Докажите, что прямая TO перпендикулярна плоскости A_1B_1C . Найдите радиус этой сферы и объем пирамиды TA_1B_1C , если сторона основания $AB = 1$, боковое ребро $TA = 5/4$.

6. Для испытания новой модели моторного катера выбран участок берега моря, представленный на карте прямой линией. Вдоль этого участка берега проходит прямая трасса, на которой расположен командный пункт. В 2 км от него в море по линии, перпендикулярной берегу, на рейде стоит корабль. Моторный катер движется в море так, что расстояние от наблюдателя на корабле до катера в любой момент времени совпадает с расстоянием от катера до движущегося по трассе автомобиля наблюдения. При этом в декартовой системе координат с началом в точке O — командном пункте, осью абсцисс, направленной вдоль трассы по ходу движения автомобиля, и осью ординат, направленной на корабль, абсциссы координат автомобиля и катера в каждый момент времени совпадают.

Укажите координаты катера в этой системе координат через четверть часа с момента начала движения автомобиля от командного пункта, если он двигался все время в одном направлении с постоянной скоростью 40 км/ч.