

Олимпиада «Шаг в будущее» по математике

11 класс, 2019 год, вариант 3

1. В состав автоматической линии по обработке корпусных деталей входило несколько одинаковых станков. Ежедневно линия обрабатывала 38880 деталей. После модернизации производства все станки линии заменили на более производительные, но тоже одинаковые, а их число увеличилось на 3. Автоматическая линия стала обрабатывать в день 44800 деталей. Сколько деталей в день обрабатывал каждый станок первоначально?

2. Решите неравенство $4 \sin x - \sqrt{\cos y} - \sqrt{\cos y - 16 \cos^2 x + 12} \geq 2$.

3. Найдите множество значений функции $y = f^{[2019]}(x)$, где

$$f(x) = \log_4 \frac{\cos 2x - 2 \cos^2 x}{\cos x - 1},$$

$f^{[n]}(x) = \underbrace{f(f(\dots(f(x)\dots))}_{n \text{ раз}}$ для любого натурального числа n .

4. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC боковая сторона AB равна 2, отрезок AD является биссектрисой. Через точку D проведена касательная DH к окружности, описанной около треугольника ADB , точка H лежит на стороне AC . Найдите площадь треугольника ABC , если $CD = CH\sqrt{2}$.

5. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$(\cos 2x + 14 \cos x - 14a)^7 - (6a \cos x - 4a^2 - 1)^7 = (6a - 14) \cos x + 2 \sin^2 x - 4a^2 + 14a - 2$$

имеет два различных решения на отрезке $[-\frac{2\pi}{3}; \pi]$. Укажите эти решения для каждого найденного a .

6. Найдите площадь сечения правильной треугольной пирамиды $TABC$ плоскостью, проходящей через центр сферы описанной около пирамиды, и через середину бокового ребра TA и параллельной медиане AD боковой грани ATC , если стороны основания равны 4, а центр сферы делит высоту пирамиды в отношении 3 : 1, считая от вершины.