

Олимпиада «Шаг в будущее» по математике

11 класс, 2019 год, вариант 2

1. Найдите натуральное число, которое имеет десять натуральных делителей (включая единицу и само число), два из которых простые, а сумма всех его натуральных делителей равна 186.

2. Решите неравенство $\cos x - \sqrt{\sin y} - \sqrt{\sin y - \sin^2 x} \geq 1$.

3. Найдите множество значений функции $y = f^{[2019]}(x)$, где

$$f(x) = \log_2 \frac{\cos 2x + 2 \sin^2 x}{1 - \sin 3x},$$

$f^{[n]}(x) = \underbrace{f(f(\dots(f(x)\dots))}_{n \text{ раз}}$ для любого натурального числа n .

4. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD , сторона AC равна $\sqrt{2}$. Описанная около треугольника ABD окружность проходит через центр окружности, вписанной в треугольник ACD . Найдите площадь треугольника ACD , если $R_1 : R_2 = \sqrt{3}$, где R_1, R_2 — радиусы окружностей, описанных около треугольников ABD и ACD соответственно.

5. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$\sqrt[3]{6a \sin x + 4a^2 - 6a} - \sqrt[3]{\cos 2x + 8 \sin x + 9} = \cos 2x + (8 - 6a) \sin x - 4a^2 + 6a + 9$$

имеет два различных решения на отрезке $[-\frac{\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}]$. Укажите эти решения для каждого найденного a .

6. Найдите площадь сечения правильной треугольной пирамиды $TABC$ плоскостью, проходящей через центр сферы описанной около пирамиды, и через середины бокового ребра TA и стороны основания BC и параллельной апофеме TF боковой грани ATB , если радиус сферы равен 3.