Олимпиада «Шаг в будущее» по математике

10 класс, 2019 год, вариант 2

1. Найдите все целые решения системы уравнений

$$\begin{cases} x+y+z=3, \\ x^3+y^3+z^3=3. \end{cases}$$

2. Решите неравенство

$$\sqrt{1-x^2}-\sqrt[4]{1-y^2}-\sqrt{\sqrt{1-y^2}-x^2}\geqslant 1.$$

3. Студент написал программу перекрашивания пикселя в один из 128 различных цветов. Эти цвета он занумеровал натуральными числами от 1 до 128, причем основные цвета получили следующие номера: белый цвет — номер 1, красный — 5, оранжевый — 13, желтый — 19, зеленый — 23, голубой — 53, синий — 55, фиолетовый — 83, черный — 128. Если исходный цвет пикселя имеет номер $n\leqslant 17$, то программа студента перекрашивает его в цвет с номером $3n-2$, а если исходный цвет пикселя имеет номер $n\geqslant 18$, то пиксель перекрашивается в цвет с номером $|129-2n|$. Изначально пиксель имел красный цвет. К нему студент последовательно применил свою программу 2019 раз. В какой цвет в результате окрасился пиксель?

4. Найдите все пары натуральных чисел a и b, для которых из четырех утверждений

1. a^2+4a+3 делится на b;
2. $a^2+ab-6b^2-2a-16b-8=0$;
3. $a+2b+1$ делится на 4;
4. $a+6b+1$ — простое число

три истинны, а одно ложно.

5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\left((1-x^2)^2+2a^2+a\right)^5-\left((3a-1)(1-x^2)+6\right)^5=2a+5+(1-3a)x^2-2a^2-(1-x^2)^2$$

имеет два различных решения на отрезке $\left[-\sqrt{6}/2;\sqrt{2}\,\right]$. Укажите эти решения для каждого найденного a.

6. В треугольнике ABC с углом A, равным 60°, проведена биссектриса AD. Радиус описанной около треугольника ADC окружности с центром в точке O равен $2\sqrt{3}/3$. Найдите длину отрезка BM, где M — точка пересечения отрезков AD и BO, если $AB=1$.