Олимпиада «Шаг в будущее» по математике

11 класс, 2018 год, вариант 3

1. Имеется 5 кусков прозрачного стекла одинаковой квадратной формы и одинакового размера. Каждое стекло своими диагоналями условно разделено на 4 одинаковые части (прямоугольные треугольники), и один из этих треугольников закрашен непрозрачной краской своего индивидуального цвета, отличного от цветов закраски других стекол. Затем все эти стекла укладываются друг на друга в стопку (с точным выравниванием границ и вершин) закрашенными частями вверх. Сколько существует различных способов укладки стекол в стопку так, чтобы вся она в итоге оказалась полностью непрозрачной в вертикальном направлении.

2. Решите уравнение

$$\sin^4(2025x) + \cos^{2019}(2016x) \cdot \cos^{2018}(2025x) = 1.$$

3. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки D и E так, что площадь треугольника ADE равна 0,5. Вписанная в четырехугольник $BDEC$ окружность касается стороны AB в точке K, причем $AK = 3$. Найдите тангенс угла BAC, если около четырехугольника $BDEC$ можно описать окружность, и $BC = 15$.

4. Решите неравенство $\frac{2}{3}g\left(\frac{g(x)}{3}\right) + 2\sqrt{2 - \frac{3}{g(x)}} \geqslant 50g(g^2(x))$, где $g(x) = \frac{3}{x^2-4x+5}$.

5. Найдите все значения параметров a и b, при которых уравнение

$$6a - 2ab\tilde{\operatorname{tg}}x + \sqrt{2\left(x + \left|x + b\tilde{\operatorname{tg}}x\right| + b\tilde{\operatorname{tg}}x\right)} = 4 + 2ax$$

имеет единственное решение, если $\tilde{\operatorname{tg}}x = \operatorname{tg} x$ при $x \neq \pi/2 + \pi n$, и $\tilde{\operatorname{tg}}x = 0$ при $x = \pi/2 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Укажите это решение при каждом из найденных значений a и b.

6. Найдите объемы частей, на которые делит правильную треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ плоскость, параллельная диагонали AC_1 боковой грани AA_1C_1C, проходящая через вершину C и центр симметрии боковой грани AA_1B_1B, если площадь сечения призмы этой плоскостью равна 21, а сторона основания призмы равна $2\sqrt{14}$.