Олимпиада «Шаг в будущее» по математике

11 класс, 2018 год, вариант 2

1. Найдите наименьшее натуральное число, имеющее ровно 42 натуральных делителя (включая единицу и само число).

2. Решите неравенство

$$\frac{\left(x+9-4\sqrt{x+6}\,\right)\log_2(x+1)}{(4^x-3\cdot 2^x+2)\log_5(5-x)} \geqslant 0.$$

3. Окружность радиуса 4 касается сторон AB и BC треугольника ABC, а окружность радиуса 12 внешним образом касается первой окружности и сторон AC и BC треугольника ABC. Общая касательная к этим окружностям, не содержащая сторону BC, пересекает отрезки AB и AC в точках M и N соответственно. Найдите площадь треугольника AMN, если $\angle AMN = 30^\circ$, $\angle ANM = 90^\circ$.

4. Найдите площадь плоской фигуры, которая на координатной плоскости Oxy задана системой неравенств

$$\begin{cases} x^2+y^2+2(y-x) \leqslant 23, \\ y+|x-2|+1 \leqslant 0. \end{cases}$$

5. Укажите все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \log_{|x+4|}(ax+5a) = 2\log_{|x+4|}(x+y), \\ x+2+\sqrt{x^2+4x+y-2} = 0 \end{cases}$$

имеет два различных решения, и найдите эти решения при каждом a.

6. Найдите объемы частей, на которые делит правильную треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ плоскость, параллельная диагонали AC_1 боковой грани AA_1C_1C, проходящая через середину стороны AB основания ABC и точку M, лежащую на стороне B_1C_1, если $MC_1 = 3B_1M$, расстояние от точки C до секущей плоскости равно $\sqrt{2}$, а сторона основания призмы равна $4\sqrt{7}$.