Олимпиада «Шаг в будущее» по математике

10 класс, 2018 год, вариант 1

1. Сравните числа: 99! и 50^{99} (напомним: $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n$).

2. Можно ли из 37 ниток сплести сетку так, чтобы каждая нитка была связана ровно с пятью другими?

3. Решить неравенство:

$$\frac{\left(\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{3-x}\right)^2\left(x^2-4\sqrt{x^2-6x+9}\right)}{x62+2\sqrt{x^2-8x+16}}\geqslant 0.$$

4. Решить уравнение:

$$\sqrt{x-15}+\sqrt{x+80}+2\sqrt{x-15}\sqrt{x+80}=315-2x.$$

5. Назовем число «новогодним», если в нем все цифры различные, оно не начинается с цифры 2 и при вычеркивании некоторого числа его цифр можно получить 2018. Сколько существует различных семизначных «новогодних» чисел?

6. Спортсмены студенческой команды должны были выйти на спортивный праздник прямоугольным строем по 45 человек в ряд. По прибытии выяснилось, что не все спортсмены взяли с собой нужную спортивную форму и, следовательно, они не смогут принять участие в празднике. Оставшихся спортсменов перестроили так, что число рядов стало на два меньше, а число спортсменов в каждом ряду стало на 48 больше числа новых рядов. Известно, что если бы все спортсмены приняли бы участие в празднике, то их можно было бы выстроить прямоугольным строем так, что число спортсменов в каждом ряду равнялось числу рядов. Сколько спортсменов планировали принять участие в спортивном празднике?

7. Найти все значения параметра b, при которых неравенство $2b+b^2-2b\sin x>\cos^2 x+2$ выполняется при любом значении x.

8. Через центр O вписанной в треугольник ABC окружности проведена прямая, параллельная AC, которая пересекает его боковые стороны AB и BC в точках M и K соответственно. Вторая окружность вписана в треугольник MBK и касается его боковой стороны MK в точке E, а первая окружность касается стороны AB в точке F. Найдите длину отрезка EF, если периметр треугольника MBK равен 6, а $AC=3$.