Олимпиада «Шаг в будущее» по математике

11 класс, 2017 год

1. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми равно 24 км, одновременно вышел пешеход и выехал велосипедист. Затратив на путь от A до B не менее двух часов, велосипедист, не останавливаясь, повернул обратно и стал двигаться по направлению к пункту A со скоростью в два раза большей первоначальной. Через 24 мин после своего отправления из пункта B велосипедист встретился с пешеходом. Определите наибольшее возможное целое значение скорости (в км/ч) пешехода, и для этого значения скорости пешехода найдите первоначальную скорость велосипедиста.

2. Решите неравенство $\log_x(36 - 60x + 25x^2) < 0$.

3. Два числа x и y удовлетворяют уравнению $26x^2 + 23xy - 3y^2 - 19 = 0$ и являются соответственно шестым и одиннадцатым членами убывающей арифметической прогрессии, состоящей из целых чисел. Найдите разность этой прогрессии.

4. Решите уравнение

$$\frac{2\operatorname{tg}^4 6x + 4\sin 4x \sin 8x - \cos 8x - \cos 16x + 2}{\sqrt{\cos x - \sqrt{3}\sin x}} = 0.$$

5. Решите неравенство

$$\frac{\left(5\cdot 2^{-\log_x 3} - 2{,}5\right)\sqrt{2 - \sqrt{\log_x 3 + 1}}}{1 + \sqrt{\log_x 3 + 8}} > \frac{\left(2^{-\log_x 3} - 0{,}5\right)\sqrt{2 - \sqrt{\log -x3 + 1}}}{\sqrt{\log_x 3 + 8} - 3}.$$

6. Найдите множество значений функции

$$f(x) = 1/g(64g(16g(\log_2 x))/5),$$

где $g(x) = \sqrt[5]{x} + 1/\sqrt[5]{x}$.

7. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка K так, что $AK = 8$, $BK = 24$, $KC = 3$. Около треугольника ABK описана окружность. Через точку C и середину D стороны AB проведена прямая, которая пересекает окружность в точке P, причем $CP > CD$. Найдите DP, если $\angle APB = \angle BAC$.

8. На прямой $x = 1$ найдите точку M, через которую проходят две касательные к графику функции $y = x^2/4$, угол между которыми равен 45°.

9. Найдите все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} 2y - 2 = a(x-1), \\ \dfrac{2x}{|y| + y} = \sqrt{x} \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a.

10. Боковые ребра треугольной пирамиды $TABC$ образуют между собой прямые углы. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через вершину C и середину стороны AB основания, если боковые ребра $TA = 6$, $TB = 12$, $TC = 2$? Какое из боковых ребер пересекает в этом случае плоскость и на какие части его делит?