

Олимпиада «Шаг в будущее» по математике

9 класс, 2016 год

1. Во время зимних каникул компания друзей решила воспользоваться услугами железной дороги и посетить исторический город N . В результате проведенных маркетинговых исследований они выяснили, что расходы на поездку будут состоять из «транспортных», «проживания-питания» и «экскурсионных», соотношение между которыми $3 : 2 : 1$, соответственно. Однако, один из друзей предложил заменить поезд автобусом и проехать в город N через не менее исторический город K . Предложение было принято. В результате расходы на «транспорт» уменьшились на 20% , а «проживание-питание» и «экскурсии» подорожали на 20% каждая составная часть.

Каким стало соотношение между расходными частями поездки «транспортной», «проживание-питание» и «экскурсионной»?

2. Найдите все пары чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$\frac{(3x^2 + 2xy - y^2)^{2016} + (x^2 - 4x + 3)^{1580}}{\sqrt{28 - 3y - y^2} \cdot (y^3 + y^2 + 9y + 9)} = 0.$$

3. Докажите, что число $\sqrt{2013 \cdot 2016 \cdot 2019 \cdot 2022 + 81}$ является целым.

4. $A_1A_2 \dots A_{2015}$ — правильный 2015-угольник. O — его центр. Найдите сумму векторов

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_{2015}}.$$

Ответ обоснуйте.

5. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} (y - 3)^2 - (x - 1)^2 = 0, \\ (x - 4)^2 + (y + 1)^2 = a \end{cases}$$

имеет нечётное число различных решений?

6. В угол 60° вписана окружность радиуса 1. Вторая окружность касается сторон угла и первой окружности. Найдите радиус третьей окружности, которая касается двух данных окружностей и одной из сторон угла.

7. В городе Математинске проживают только рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят только правду, а лжецы всегда лгут. Город разделён на четыре округа: Северный, Западный, Южный и Восточный. На вопрос: «Вы живёте в Северном округе?» ответили «да» 610 человек, на вопрос: «Вы живёте в Западном округе?» сказали «да» 680 человек, на вопрос: «Вы живёте в Южном округе?» ответили «да» 690 человек, а на вопрос: «Вы живёте в Восточном округе?» сказали «да» 600 человек. На следующий день в Южном и Восточном округах проходил карнавал: лжецы переоделись в рыцарей и стали говорить правду, а рыцари переоделись в лжецов и стали лгать (в Северном и Западном округах в этот день карнавал не проводился). В результате на вопрос «Вы живёте в Северном округе?» в этот день ответили «да» 620 человек.

1. Сколько лжецов проживает в Математинске?
2. Сколько всего жителей в Математинске?