

## Олимпиада «Шаг в будущее» по математике

11 класс, 2016 год

1. Друзья Вася, Петя и Коля живут в одном доме. Однажды Вася и Петя пешком отправились на рыбалку на озеро. Коля остался дома, пообещав приятелям встретить их на велосипеде на обратной дороге. Первым домой отправился Вася, одновременно с ним навстречу на велосипеде выехал Коля. Петя с той же скоростью, что и Вася, отправился с озера домой в момент встречи Коли и Васи. Коля, встретив Васю, сразу же развернулся и довез его домой, а затем тотчас же снова на велосипеде двинулся по дороге к озеру. Встретив Петю, Коля вновь развернулся и довез приятеля до дома. В результате, время, затраченное Петей на дорогу с озера домой, составило  $5/4$  от времени, затраченного Васей на тот же путь. Во сколько раз медленнее Вася добрался бы до дома, если бы весь путь он прошел бы пешком?

2. Решите неравенство  $\frac{\sqrt{x^2-5}}{x} - \frac{x}{\sqrt{x^2-5}} < \frac{5}{6}$ .

3. Все члены бесконечной геометрической прогрессии являются натуральными числами. Сумма третьего, пятого и седьмого членов этой прогрессии равна  $819 \cdot 6^{2016}$ . Найдите знаменатель прогрессии.

4. Решите неравенство  $(\log_x^2(7x-6) - 4)(\cos \pi x - 1) \leq 0$ .

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4 \cos^2 2x \cdot \sin^2 \frac{x}{3} + 4 \sin \frac{x}{3} - 4 \sin^2 2x \cdot \sin \frac{x}{3} + 1 = 0, \\ \sin \frac{x}{2} + \sqrt{\cos y} = 0. \end{cases}$$

6. Найдите множество значений функции

$$f(x) \operatorname{arctg} \sqrt{6 \log_{0,25}^{-1} \left( \frac{\sin x}{\sin x + 15} \right)}.$$

7. На диагонали  $AC$  ромба  $ABCD$  выбрана точка  $K$ , удаленная от прямых  $AB$  и  $BC$  на расстояния 8 и 2 соответственно. Радиус вписанной в треугольник  $ABC$  окружности равен 3. Найдите сторону ромба  $ABCD$  и радиус окружности, вписанной в этот ромб.

8. На оси  $Oy$  найдите точку  $M$ , через которую проходят две касательные к графику функции  $y = 0,5(x - (1/2))^2$ , угол между которыми равен  $45^\circ$ .

9. Определите все значения  $a$ , при которых уравнение

$$4x^2 - 16|x| + (2a + |x| - x)^2 = 16$$

имеет ровно два различных корня. Укажите эти корни при каждом из найденных значений  $a$ .

**10.** В сферу радиуса  $R$  вписана правильная треугольная пирамида, у которой высота относится к стороне основания, как  $\sqrt{2} : \sqrt{3}$ . Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через медиану боковой грани? Найдите отношение объёмов частей, на которые секущая плоскость разбивает пирамиду в этом случае.