Олимпиада САММАТ

9 класс, 2023 год

1. Пусть $a, b \in \mathbb{N}$, оказалось, что $a^2 + b^2 = (a+b)q + r$ и $r < (a+b)$, $k, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Найти максимальную сумму $a + b$, если $q^2 + r + 10 = 2023$.

2. Решить уравнение в целых числах

$$\sqrt{xy^2 - 2022} + 1 = \frac{2023}{xy^2 + 1}.$$

3. По двум взаимно перпендикулярным дорогам движутся в направлении перекрестка велосипедист и пешеход. В некоторый момент времени велосипедист находится на расстоянии 32 км, а пешеход — на расстоянии 14 км от перекрестка. Через какое время после этого расстояние между ними будет равно 10 км и на каком расстоянии будут находиться велосипедист и пешеход от перекрестка, если скорость пешехода 4 км/час, а велосипедиста 12 км/час?

4. Найти наименьшее положительное решение неравенства

$$[x]^2 - x \cdot [x] + 3 \leqslant 0.$$

5. Найти наименьшее значение выражения

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y+2)^2} + \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2},$$

где x, y — произвольные вещественные числа.

6. Установить, какое из чисел больше

$$\frac{2023^{2023} + 2020^{2020}}{2023^{2020} + 2020^{2023}} \quad \text{или} \quad 1.$$

7. Постройте кривую, все точки которой определяются уравнением $y^2 - 2|y| = 1 - x^2$. Найдите площадь фигуры, ограниченной этой кривой.

8. Зная заданный отрезок a, с помощью циркуля и линейки (без шкалы деления) построить отрезок $b = a \cdot \frac{2+\sqrt{7}}{1+\sqrt{11}}$.

9. Сколько действительных корней имеет уравнение

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{7}x\right)\left(x^{2023} + 2022x^3 - 2021\right) = 0$$

на отрезке $x \in [-36, 34]$?

10. Найти наибольшее значение параметра а, при котором многочлены $P(x) = 2x^3 + x^2 + x + a$ и $Q(x) = x^3 - 2x^2 + x + 2a$ имеют хотя бы один общий корень.