

Олимпиада САММАТ

7 класс, 2023 год

1. Найти все пары натуральных чисел, удовлетворяющих уравнению

$$39^x = 1521 \left[39^{x-2} + \frac{1}{39x} \right] - y.$$

2. В четырехугольнике даны три угла 91° , 97° и 101° . Диагональ четырехугольника, выходящая из вершины четвертого угла, равна 2022 см. Может ли в этом четырехугольнике длина второй диагонали быть 2023 см?

3. Известно, что

$$\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z} + \frac{1}{y+z} = \frac{9}{10}, \quad \frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} = \frac{51}{10}.$$

Найти $x + y + z$.

4. Сколько различных пар взаимно простых натуральных чисел m и n ($m > n$) существует таких, что частное многочленов $m^3 - m^2 + m^2n - n^2m + n^2 - n^3$ и $m^2 - n^2$ равно 17? В ответе укажите пары таких чисел.

5. Есть куб 7×7 , составленный из маленьких кубиков 1×1 . У куба три пары противоположных граней. Пронумеруем их: 1, 2, 3. На каждой грани маленьких кубиков написали номер той пары граней куба, которой она принадлежит (см. рис.). Затем куб разобрали и на мелкие кубики. У скольких кубиков сумма цифр на гранях четная (кубики, у которых вообще нет цифр на гранях, не считать)?

6. На карте нанесены 4 населенных пункта А, Б, В, Г. Расстояние от города А до города Б по прямой 25 км, расстояние от города Б до города В по прямой 35 км, от города В до города Г по прямой — 60 км, а от города А до города Г по прямой — 120 км. Какое время велосипедист затратил бы на прохождение пути по прямой от А до В, если его скорость 10 км/час?

7. Ученик купил ручки по 2 рубля за штуку и карандаши по 3 рубля за штуку. Если бы ручки стоили по 3 рубля за штуку, а карандаши по 4 рубля, то ему пришлось бы заплатить на 16 рублей больше, а если бы ручки стоили 4 рубля, а карандаши — по 1 рублю, то тогда бы он заплатил на 4 рубля меньше. Сколько ручек и карандашей купил ученик и на какую сумму?

8. В треугольнике $\triangle ABC$ проведена высота AH из угла $\angle A$. $\angle B = 120^\circ$, $\angle C = 2 \cdot \angle A$. Найдите угол между высотой AH и стороной AC .

9. Задана величина

$$m = \frac{1}{1686} + \frac{1}{1687} + \frac{1}{1688} + \dots + \frac{1}{2021} + \frac{1}{2022}.$$

Докажите, что $\frac{1}{6} < m < \frac{1}{5}$.

10. На кольцевой линии метро курсируют 24 поезда. Они следуют в одном направлении с одинаковыми скоростями и равными интервалами. Сколько поездов надо добавить, чтобы при той же скорости уменьшить интервалы на 20%?