

# Олимпиада САММАТ

10 класс, 2023 год

1. Найдите квадратный трехчлен  $P(x)$ , у которого один из корней совпадает с корнем многочлена  $Q(x) = P(x) - 6x + 12$ , а второй корень в три раза меньше наибольшего из корней многочлена  $Q(x)$  и  $Q(3) = -3$ .

2. Решите систему

$$\begin{cases} x_1(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{2023}) = 1, \\ x_2(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{2023}) = 3, \\ x_3(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{2023}) = 5, \\ \dots \\ x_{2023}(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{2023}) = 4045. \end{cases}$$

3. На плоскости  $Oxy$  заданы две точки:  $A(6, 1)$  и  $B(2, 5)$ . Найти наименьшую длину ломаной  $AMNB$ , если точка  $M$  лежит на оси  $Ox$ , а точка  $N$  — на оси  $Oy$ .

4. Сколько существует различных восьмизначных чисел, делящихся на 11, в десятичной записи которых ровно по одному разу встречаются цифры  $\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ , а оставшиеся две цифры — нули?

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \cos^3 x = \sin y, \\ \sin^3 x = \cos y. \end{cases}$$

6. Найти решение уравнения в целых числах:

$$10 - \sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 1} - \sqrt{x^2 + y^2 - 18x + 81} = 0.$$

7. Числа  $\frac{5}{2}$ ,  $-\frac{11}{2}$ ,  $\frac{121}{10}$  являются членами некоторой арифметической прогрессии. Найти разность прогрессии, если известно, что первое из указанных чисел является ее шестым членом.

8. Существует ли четырехугольная пирамида, две противоположные боковые грани которой перпендикулярны плоскости основания пирамиды? Ответ обосновать.

9. Три равных окружности радиуса  $r$  расположены внутри окружности радиуса  $R$ , попарно касаются между собой и внешней окружности. Зная величину отрезка  $r$ , при помощи циркуля и линейки (без единицы измерения) построить отрезок  $R$ .

10. Дан треугольник  $\triangle ABC$  с острым углом  $\angle A$  такой, что  $AB \neq AC$ . На сторонах  $AB$  и  $AC$  вне треугольника построены квадраты  $ABDE$  и  $ACFG$  с центрами  $K$  и  $L$ . Оказалось, что точки  $D$ ,  $E$ ,  $F$  и  $G$  лежат на одной окружности  $\omega$  с центром  $O$ . Найти угол  $\angle A$  треугольника  $\triangle ABC$ .