

Олимпиада САММАТ

9 класс, 2022 год

1. Решить уравнение $x^4 - 8\sqrt{3}x^3 + 66x^2 - 72\sqrt{3}x + 81 = 0$.

2. Выясните, каким числом (рациональным или иррациональным) является значение числового выражения:

$$\frac{\left(\sqrt{\sqrt{20}-4} + \sqrt{\sqrt{20}+4}\right)^2}{\sqrt{(4-\sqrt{20})^2}} - 3\sqrt{20}.$$

3. В треугольнике ABC на сторонах BC , AC , AB отметили точки D , E , F соответственно так, что $AF : FB = BD : DC = CE : EA = 2 : 3$. Отрезки AD , BE , CF попарно пересекаются в точках P , Q , R . Площадь треугольника ABC равна 19. Найдите площадь треугольника PQR .

4. Докажите, что для последовательности чисел $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{25}$ выполняется следующее неравенство

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{23} + a_{24} + a_{25}}{a_5 + a_{10} + a_{15} + a_{20} + a_{25}} < 5.$$

5. В кошельке в достаточном количестве купюры достоинством 100 и 200 рублей. Сколькими различными способами, извлекая купюры по одной, можно расплатиться за покупку стоимостью 1800 рублей?

6. Четыре положительных числа a , b , c , d таковы, что

$$ab + cd = ac + bd = 4 \quad \text{и} \quad ad + bc = 5.$$

Найдите наименьшее возможное значение суммы $a + b + c + d$.

7. Известно, что квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет корни. Имеет ли корни квадратный трехчлен $a^{2021}x^2 + b^{2021}x + c^{2021}$? Ответ обоснуйте.

8. Для квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ выполняются условия:

$$f(0) + f(1) = 0; \quad f(2) + f(3) = 0.$$

Найти корни уравнения $f(x) = 0$.

9. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 48, \\ xy - 2z^2 - 4u^2 = 576. \end{cases}$$

10. На доске выписаны целые числа от 1 до 10. Игорь и Матвей на листках выписывают некоторые из написанных на доске чисел (хотя бы по одному числу). Какова вероятность того, что найдется хотя бы одно число, которое назовут оба мальчика, когда будут зачитывать выбранные числа?