Олимпиада САММАТ

8 класс, 2022 год

1. Пусть y — действительное число, отличное от нуля. Известно, что x_1, x_2 — корни уравнения $x^2 + \frac{x}{y} - \frac{y^2}{2} = 0$. Докажите, что $x_1^4 + x_2^4 \geqslant 2 + \sqrt{2}$.

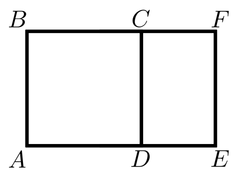
2. Докажите, что для последовательности чисел $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_9$ выполняется следующее неравенство:
$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_8 + a_9}{a_3 + a_6 + a_9} < 3.$$

3. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение
$$x^2 - |x + a + 3| = |x - a - 3| - (a + 3)^2$$
имеет единственное решение.

4. В коробке находится в совокупности 30 черных и белых шаров, при этом среди любых 12 шаров есть хотя бы один белый, а среди любых 20 шаров хотя бы один черный. Сколько белых шаров в коробке?

5. Назовем натуральное число интересным, если оно представимо в виде $m^2 + 4n^2$, где m и n — целые числа. Является ли произведение двух интересных чисел также интересным числом? Ответ обоснуйте.

6. Задан квадрат $ABCD$ со стороной, равной 2. К нему пристроен прямоугольник $CDEF$ (см. рис.). При помощи циркуля и линейки построить прямоугольник $CDEF$, подобный прямоугольнику $ABFE$.



7. Число a при делении на 13 дает остаток 7. Каким будет остаток при делении на 13 числа $15a^2 + 4a + 9$?

8. Сравните числа $2^{17^{17}}$ и $17^{2^{17}}$.

9. Попарно различные числа a, b, c удовлетворяют условию
$$a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a}.$$
Какие значения может принимать $a \cdot b \cdot c$?

10. Известно, что квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет корни. Имеет ли корни квадратный трехчлен $a^3x^2 + b^3x + c^3$? Ответ обоснуйте.