Олимпиада САММАТ

11 класс, 2022 год

1. Найдите наименьшее значение функции

$$f(a,b,c)=\left(\frac{a+4b}{c}\right)^2+\left(\frac{2b+2c}{a}\right)^2+\left(\frac{c+2a}{2b}\right)^2$$

при $a>0$, $b>0$, $c>0$.

2. Решите неравенство

$$4\left(1-\ln\left(\frac{x}{2021}\right)\right)^{2020}+\left(1+\ln\left(\frac{x}{2021}\right)\right)^{2022}\geqslant 2^{2022}.$$

3. В школе математики и программирования лестница с первого этажа на второй этаж состоит из двух пролетов, состоящих из 8 и 9 ступенек. Сколькими способами десятиклассник Вася может спуститься по ней, если он может шагать на следующую ступеньку, или перешагивать через ступеньку, или прыгать через две ступеньки?

4. Дана арифметическая прогрессия $a_1=25$, a_2, a_3, …, $a_{2022}=2025$. Вычислите

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_{2021}}+\sqrt{a_{2022}}}.$$

5. Решить уравнение

$$\sqrt{x^2+4x-2}-\sqrt{x^2+6}=\sqrt[3]{x+3}-\sqrt[3]{3x-1}.$$

6. Докажите, что для $a<1$, $b<1$, $c<1$, $a+b+c\geqslant\frac{1}{2}$ выполняется неравенство

$$(1-a)(1-b)(1-c)\leqslant\frac{125}{216}.$$

7. Пусть задано множество остатков от деления на 11 $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Пусть над этим множеством задана степенная функция четвертой степени (т. е. все значения переменных и коэффициенты принадлежат только множеству A) $f(x)=x^4+3x^3+7x^2+6x+10$. Найдите элемент множества A, являющийся суммой корней уравнения $f(x)=0$.

8. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{yz}}{y+z}, \\ y = \dfrac{\sqrt{xz}}{x+z}, \\ z = \dfrac{\sqrt{yx}}{y+x}. \end{cases}$$

9. Найти наименьшее значение функции

$$f(x) = x^8 - 8\sqrt{3}x^6 + 66x^4 - 72\sqrt{3}x^2 + 100.$$

10. Три окружности с радиусами $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ попарно касаются друг друга внешним образом, а также касаются внешним образом четвертой окружности с радиусом r. Найти r.