Олимпиада САММАТ

10 класс, 2022 год

1. Докажите, что все корни уравнения

$$(x+1)(x+2)(x+3)\ldots(x+2022)=2022$$

меньше $\frac{1}{2021!}$, где $2021! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2021$.

2. Пусть число $\overline{abc}$ простое. Через n обозначим наименьший делитель числа $\overline{abcabc}$, отличный от 1, а через m — другой делитель, ближайший к n. Найти $n\cdot m$.

3. Решить уравнение $x^8-8\sqrt{3}x^6+66x^4-72\sqrt{3}x^2+81=0$.

4. Дана арифметическая прогрессия $a_1=1$, a_2, a_3, …, $a_{22}=16$. Вычислите

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_{21}}+\sqrt{a_{22}}}.$$

5. В строку выписали 2022 натуральных чисел: a_1, a_2, a_3, …, a_{2022}. Верно ли, что-либо одно из них делится на 2022, либо сумма нескольких рядом стоящих делится на 2022? Вывод строго обосновать.

6. Докажите, что для $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$ выполняется неравенство $(a+b)(ab+2025)\geqslant 180ab$.

7. Найти минимальное значение выражения

$$x^4-3x^2+4-\frac{5}{x^2+1}+\frac{1}{(x^2+1)^2}.$$

8. Функция $f(x)$ определена для всех вещественных x и удовлетворяет неравенству

$$\sqrt{5f(x)}-\sqrt{5f(x)-f(5+x)}\geqslant 5$$

при всех вещественных x. Верно ли, что $f(x)\geqslant 25$ для каждого вещественного x? Ответ объясните.

9. В школе математики и программирования лестница с первого этажа на второй этаж состоит из двух пролетов, состоящих из 8 и 9 ступенек. Сколькими способами десятиклассник Вася может спуститься по ней, если он может шагать на следующую ступеньку, или перешагивать через ступеньку, или прыгать через две ступеньки?

10. Три окружности с радиусами $a=1$, $b=2$, $c=3$ попарно касаются друг друга внешним образом, а также касаются внешним образом четвертой окружности с радиусом r. Найти r.