

Олимпиада САММАТ

9 класс, 2021 год, вариант 1

1. При каких значениях параметра a корни уравнения $x^3 + ax^2 + 56x - 64 = 0$ составляют геометрическую прогрессию?

2. Решите уравнение: $x^2 - x - \frac{7}{4} = [x - \frac{1}{2}]$. Здесь квадратные скобки $[x]$ означают целую часть числа x , т. е. наибольшее целое, не превосходящее x .

3. Пятеро преподавателей проверяют олимпиадные работы. Первый, четвертый и пятый преподаватели, работая вместе, могут проверить все работы за 20 часов. Второй, третий и пятый — за 15 часов. Если эти работы проверяют все преподаватели, кроме пятого, то все работы будут проверены на 10 часов. Во сколько раз быстрее будут проверены все работы, если в проверке участвуют все пять преподавателей по сравнению с тем, когда проверяет все работы только пятый преподаватель?

4. При каких целых k, m, n имеет место равенство $k^2 - m^2 - 4n^2 + 4mn = 2021$? Выполнить полное исследование задачи и привести несколько примеров.

5. Доказать неравенство

$$\frac{x}{-x + y + z} + \frac{y}{x - y + z} + \frac{z}{x + y - z} \geq 3,$$

где x, y, z — стороны произвольного треугольника.

6. Куб размером $n \times n \times n$, где n — натуральное число, разрезали на 99 кубиков, из которых ровно у одного ребро имеет длину отличную от единицы (у каждого из остальных ребро равно 1). Найти объем исходного куба.

7. Сколько решений в натуральных числах (m, n) имеет уравнение $\text{НОК}(m, n) = 2020^3$?

8. В треугольнике $\triangle ABC$ известны длины всех его сторон: $AB = 13$, $BC = 5$, $AC = 12$. На продолжении стороны AB отложен отрезок $BD = BC$ и проведена биссектриса угла $\angle B$ треугольника $\triangle ABC$, пересекающая сторону AC в точке E . Найти площадь четырехугольника $CDBE$.

9. На некоторой планете при изучении геометрии на плоскости расстояние ρ между двумя точками $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ в декартовой ортогональной системе координат определяют по формуле $\rho(A, B) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$. Построить в этой геометрии окружность с центром в точке $(-2, -1)$ и радиусом $R = 4$ и найти длину этой окружности.

10. На планете X21KL9 2021 страна, и для любой их четверки хотя бы одна страна из этой четверки враждует с тремя другими. Найти наименьшее возможное количество стран, которые враждуют со всеми странами сразу.