Олимпиада САММАТ

10 класс, 2021 год, вариант 2

1. Решите уравнение
$$\operatorname{arctg}\left(\frac{x+2020}{1-2020x}\right)-\operatorname{arctg}x=\operatorname{arctg}(2020).$$

2. Известно, что приведенный квадратный трехчлен $f(x) = x^2 + px + q$ имеет различные действительные корни. Сколько различных действительных корней может иметь уравнение $f(2021x) + f\left(2021x + \sqrt{p^2 - 4q}\right) = 0$?

3. Числа a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 и a_7 образуют геометрическую прогрессию, при этом среди них есть как рациональные числа, так и иррациональные. Какое наибольшее количество членов этой прогрессии могут быть рациональными числами? Ответ обосновать.

4. Докажите справедливость следующего неравенства
$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots+\frac{2020}{2021!}<1.$$

5. Вещественные числа α и β таковы, что $\alpha^3 - 3\alpha^2 + 5\alpha - 17 = 0$ и $\beta^3 - 3\beta^2 + 5\beta + 11 = 0$. Найдите сумму чисел α и β.

6. Для любой пары чисел определена некоторая операция «$*$», удовлетворяющая следующим свойствам: $a * (b * c) = (a * b) \cdot c$ и $a * a = 1$, где операция «$\cdot$» — операция умножения. Найдите корень x уравнения: $x * 3 = 2020$.

7. В остроугольном треугольнике из одной вершины проведена медиана, из другой — биссектриса, из третьей — высота. Могут ли проведенные биссектриса и медиана разделить высоту на три равные части? Ответ объясните.

8. Решить уравнение
$$\sqrt{x-2\sqrt{x-2}-1}+\sqrt{x-2\sqrt{x-3}-2}=\sqrt{x-2}.$$

9. Доказать, что при всех натуральных n число $3^{2n+3} + 40n - 27$ делится на 64.

10. Решить в целых числах уравнение
$$4x^2+3y^2+5z^2-24y=1.$$