Олимпиада «Росатом» по математике

11 класс, 2024 год, комплект 2

1. У Пети в семье, помимо папы, мамы и бабушки, есть еще братья и сестры. Средний возраст папы, мамы и бабушки на 20 лет больше среднего возраста детей и на 10 лет больше среднего возраста всех членов семьи. Сколько сестер у Пети?

одна сестра

2. Решите уравнение

$$2\sin\pi x = \left[\lg\frac{2^x}{10}\right] - [\lg[2^x]]\,.$$

Здесь $[a]$ — целая часть числа a — наибольшее целое число, не превосходящее a.

$x_1 = 2m - \frac{1}{6}$, $x_2 = 2m - \frac{5}{6}$, $m = 1, 2, \ldots$

3. Натуральное число $n \geqslant 2024$ имеет простой делитель $p > 3$ и другой делитель q, связанный с p соотношением $(p-1)(q+3) = n - 3$. Найдите наименьшее возможное при этих условиях число n.

2523

4. Область G на плоскости, ограниченная двумя параболами $y = -2x^2 + x$ и $y = x^2 + px + q$, имеет площадь 112. Вертикальная прямая $x = 2$ разбивает ее на две равновеликие части. Найдите p и q.

$p = -11$, $q = 12 - 3 \cdot 28^{2/3}$

5. На графике приведенного квадратного трехчлена с целыми коэффициентами отмечены две точки с целочисленными координатами. Найдите расстояние между этими точками, если известно, что оно выражается целым числом, а дискриминант квадратного трехчлена равен 4.

d — любое чётное неотрицательное число

6. Медианы оснований треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ пересекаются в точках O и O_1 соответственно. На отрезке OO_1 взята точка P так, что $O_1P : PO = 1 : 3$. Через точку P проведена прямая параллельная диагонали A_1C боковой грани призмы. Найдите длину отрезка этой прямой, расположенного внутри призмы, если длина диагонали A_1C равна 2.

$\frac{7}{6}$