

Олимпиада «Росатом» по математике

11 класс, 2023 год, комплект 2

1. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами удовлетворяет условию $P(17) = P(23) = 2023$. Найти наименьшее возможное при этих условиях значение $P(0) > 0$.

$$\boxed{89 = \min(0) \mathcal{A}}$$

2. Решить уравнение

$$\log_{\sin x} \sin 2x + \log_{\sin 2x} \sin 3x + \log_{\sin 3x} \sin x = \log_{\sin 2x} \sin x + \log_{\sin 3x} \sin 2x + \log_{\sin x} \sin 3x.$$

$$\boxed{\mathbb{Z} \ni u^{\sin x} + \frac{x}{\sin x} = x}$$

3. Найти приведенный многочлен $P(x)$ (коэффициент при старшей степени x равен 1), для которого справедливо тождество $xP(x-1) = (x-3)P(x)$ по переменной x .

$$\boxed{(x-3)(x-1)x = (x) \mathcal{A}}$$

4. При каких тройках чисел $(x; y; z)$, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} \sin x - \sin y = y - x, \\ \sin y - \sin z = z - y, \end{cases}$$

выражение $\left| \frac{z}{1+xy} \right|$ принимает наибольшее возможное значение?

$$\boxed{(1; 1; 1) \text{ и } (1; -1; -1)}$$

5. Петя записывает на листе бумаги строчку из 7 нулей и 20 единиц, расположенных в совершенно случайном порядке. Найти математическое ожидание случайной величины — числа нулей, записанных до появления первой единицы.

$$\boxed{\frac{8}{1} = \frac{18}{2} = 9 \mathcal{M}}$$

6. Длина стороны AD четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность, равна 5. Точка M делит эту сторону в отношении $AM : MD = 1 : 4$, а прямые MC и MB параллельны сторонам AB и CD соответственно. Найти длину стороны BC четырехугольника.

$$\boxed{2 = BC}$$