Олимпиада «Росатом» по математике

11 класс, 2023 год, комплект 1

1. Петя и Вася пригласили одноклассников на свой день рожденья в дом Пети и посадили всех за круглый стол пить чай. Петя отметил для себя наименьшее число стульев, разделяющих его с каждым из приглашенных гостей, кроме Васи. Сложив полученные числа, он получил 60. Найти число стульев за столом, если известно, что оно четное. Какое наименьшее число стульев разделяло Петю и Васю?

18 стульев, 4 стула

2. Решить уравнение

$$\left(\sin^4 5x + 1\right)\left(\sin^4 3x + 1\right) = 4\sin^2 5x \cdot \sin^2 3x.$$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi t, t \in \mathbb{Z}$

3. Найти все целые решения уравнения

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \left(\sqrt{2} - 1\right)^{2022}.$$

$n = \frac{1}{4}\left(\left(\sqrt{2}+1\right)^{2022} - \left(\sqrt{2}-1\right)^{2022}\right)^2$

4. Решить уравнение

$$\left(\log_2 x + \sqrt{\log_2^2 x + 1}\right)\left(\log_2(x-2) + \sqrt{\log_2^2(x-2) + 1}\right) = 1.$$

$x = 1 + \sqrt{2}$

5. На клетках шахматной доски размером 8×8 случайным образом расставлены 4 одинаковых фигуры. Найти вероятность того, что три из них будут находиться либо на одной горизонтали, либо на одной вертикали, либо на одной из двух главных диагоналей.

$P(A) = \frac{687}{7564} \approx 0{,}09$

6. На ребре AC основания треугольной пирамиды $ABCD$ расположена точка M так, что $AM : MC = 1 : 2$. Через середину ребра BC основания пирамиды проведена плоскость P, проходящая через точку M и параллельная боковому ребру CD. В каком отношении плоскость P делит объем пирамиды?

$V_1 : V_2 = 7 : 11$