Олимпиада «Росатом» по математике

11 класс, 2022 год, комплект 2

1. Клиенты интернет магазина «Али-экспресс» проживают в семи домах, расположенных в вершинах выпуклого семиугольника. От жителей первого дома поступил один заказ, от второго дома — два заказа, и т. д. от жителей шестого — шесть заказов. А вот жители последнего седьмого дома сделали 21 заказ. Менеджер магазина задумался о том в какое место следует доставить все заказы, чтобы суммарное расстояние, преодолеваемое всеми клиентами для получения товара, было минимально возможным. Помогите ему в решении этой задачи и обоснуйте результат.

Товары следует доставить в седьмой дом

2. Найти все числа C, для которых неравенство

$$|\alpha \sin x + \beta \cos 2x| \leqslant C$$

выполняется при всех x и любых $(\alpha; \beta)$ таких, что $\alpha^2 + \beta^2 \leqslant 4$.

$C \geqslant 2\sqrt{2}$

3. Члены последовательности a_n удовлетворяют соотношению: $a_{n+2} = a_n - \dfrac{2}{a_{n+1}}, a_1 = 8, a_2 = 19$. Найти n, для которого $a_n = 0$.

$n = 78$

4. Петя бросает несколько раз на стол игральный кубик и считает сумму очков, выпавших на его верхней грани. Для любого натурального числа n событие A_n наступает, если эта сумма равна n. Найти вероятность события A_{11}.

$P(A) = \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{2}{6^2} + \frac{27}{6^3} + \frac{104}{6^4} + \frac{205}{6^5} + \frac{252}{6^6} + \frac{210}{6^7} + \frac{120}{6^8} + \frac{45}{6^9} + \frac{10}{6^{10}} + \frac{1}{6^{11}}\right) = \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{7^{10}}{6^{11}} - 11\frac{7^3}{6^5}\right)$

5. На плоскости отмечено множество точек M, координаты x и y которых связаны соотношением

$$\sin(2x + 3y) = \sin 2x + \sin 3y.$$

Круг радиуса R, расположенный на той же плоскости, не пересекается с множеством M.

Какие значения может принимать радиус такого круга?

$R \in \left(0; \frac{5-\sqrt{13}}{6}\pi\right)$

6. Точка M лежит на ребре AB куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. В квадрат $ABCD$ вписан прямоугольник $MNLK$ так, что одной из его вершин является точка M, а три другие расположены на различных сторонах квадрата основания. Прямоугольник $M_1N_1L_1K_1$ является ортогональной проекцией прямоугольника $MNLK$ на плоскость верхнего основания $A_1B_1C_1D_1$. Диагонали четырехугольника MK_1L_1N перпендикулярны. Найти отношение $AM : MB$.

$AM : MB = 1 : 3$