

## Олимпиада «Росатом» по математике

### 11 класс, 2021 год, комплект 1

1. Сколько раз за сутки секундная и минутная стрелки часов образуют с часовой стрелкой угол в  $30^\circ$ ? (сутки начинаются в полночь).

4 раз

2. Решить неравенство:

$$\frac{\sin^2 x}{|\cos 2x|} \leq 2|\sin x| - |\cos 2x|.$$

$\mathbb{Z} \ni u, \frac{x}{ux} + \frac{9}{x} = x$

3. Сколько существует пар натуральных чисел  $(a, b)$ , у которых  $\text{НОК}(a, b) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 = 17640$ , а  $\text{НОД}(a, b) = 12$ ? Среди всех таких пар указать ту, для которой  $a + b$  принимает минимально возможное значение и найти это значение (пары  $(a, b)$  и  $(b, a)$  считать за одну).

(1) восемь пар; (2) (30; 49); (a + b) мин = 948

4. На столе лежит колода игральных карт 36 листов. Два опытных игрока Кондрат и Игнат (каждый из них всегда делает правильный ход) начинают игру по следующим правилам. В начале игры каждый из игроков совершенно случайно называет одну из цифр от 1 до 3. Их сумма определяет (на всю игру) максимальное число карт, которые при очередном ходе игроки могут забрать со стола. Игрок не может при своем ходе не взять со стола карту. Выигрывает тот из игроков, кто сможет забрать последнюю карту в колоде. Начинает всегда Кондрат. Какая вероятность победы Игната?

$\frac{6}{5}$

5. При каких  $a$  уравнение

$$\arcsin(\cos x) = \cos(\arcsin(x - a))$$

имеет единственное решение?

$$\mathbb{Z} \ni x, \left\{ \sqrt{2x^2 + 2x - \frac{x}{2}}, \sqrt{2x^2 + 2x + \frac{x}{2}} \right\} \cap \left[ \sqrt{2x^2 + 1 + \frac{x}{2}}, \sqrt{2x^2 + 1 - \frac{x}{2}} \right] \cap \left( \sqrt{2x^2 + 1 + \frac{x}{2}} - \sqrt{2x^2 + 1 - \frac{x}{2}} \right) \ni a$$

6. На ребре  $AD$  основания куба  $ABCD A' B' C' D'$  ( $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ ,  $DD'$  параллельные боковые ребра) расположена точка  $M$  так, что  $AM : AD = 1 : 3$ . Через точку  $M$  и вершины  $A'$  и  $C'$  куба проведена плоскость  $P$ . Найти расстояние до плоскости  $P$  точки  $N$ , расположенной на ребре  $AB$  так, что  $AN : AB = 1 : 2$ , если длина ребра куба равна  $2\sqrt{19}$ .

5