Олимпиада «Росатом» по математике

10 класс, 2021 год, комплект 2

1. Найти наименьшее натуральное число, имеющее при делении на 3, 5 и 6 в остатке 1, а при делении на 11 — остаток 5.

$\boxed{n_{\min} = 181}$

2. Решить неравенство

$$\sqrt{(\cos^2 x + 1{,}5\sin x)\,(3\cos^2 x - 1{,}5\sin x)} \geqslant 2\cos^2 x.$$

$\boxed{x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}}$

3. Члены двух числовых последовательностей a_n и b_n связаны между собой соотношениями

$$\begin{cases} 2a_{n+1} = \sqrt{3}a_n - b_n, \\ 2b_{n+1} = a_n + \sqrt{3}b_n, \end{cases} \quad a_1 = b_1 = 1$$

для всех натуральных n. Найти наименьшее натуральное число m, для которого $a_{n+m} = a_n$, $b_{n+m} = b_n$ при любых n. Найти значения a_{2021} и b_{2021}.

$\boxed{1)\ m_{\min} = 12;\ 2)\ a_{2021} = \frac{-1-\sqrt{3}}{2},\ b_{2021} = \frac{1-\sqrt{3}}{2}}$

4. Известно, что квадрат любого из корней кубического уравнения

$$x^3 - x + 2 = 0$$

является корнем другого, также кубического уравнения. Найдите это уравнение.

$\boxed{x^3 - 2x^2 + x - 4 = 0}$

5. Точки O и Q — центры описанной и вписанной окружностей треугольника ABC соответственно. Прямая AB пересекает отрезок OQ в точке M так, что $OM : MQ = 2$. Найти углы треугольника ABC, если известно, что Q равноудалена от точек A и B.

$\boxed{\text{Углы при вершинах } A \text{ и } B \text{ равны } \alpha = \arccos\frac{2+\sqrt{10}}{6}\text{, угол при вершине } C \text{ равен } \pi - 2\alpha}$