

Олимпиада «Росатом» по математике

11 класс, 2020 год, комплект 3

1. В бассейне, на соседних дорожках тренируются два пловца Петя и Костя. Петя проплывает дорожку 50 м за две минуты, Костя — за три. Вначале тренировки оба находились на линии старта у края дорожки, спустя 60 мин тренировка закончилась. Сколько раз за это время, включая начало, они находились на одинаковом расстоянии от линии старта?

26 92

2. При каких значениях a точка с координатами $(\sin a; \sin 3a)$ симметрична точке с координатами $(\cos a; \cos 3a)$ относительно прямой с уравнением $x + y = 0$?

$\mathbb{Z} \ni u, \frac{7}{ux} + \frac{8}{x} = v$

3. Поверхность коробки размером $3 \times 4 \times 5$ разбита на 94 квадрата размером 1×1 . В квадратах, принадлежащих одной грани, написаны одинаковые натуральные числа. На параллельной ей грани коробки эти числа повторяются (на каждой паре параллельных граней числа, вообще говоря, разные). Муравей Гоша совершает путешествия по поверхности коробки, соблюдая следующие правила:

1) маршрут начинается в центре любого из указанных квадратов, заканчивается в нем же и представляет собой замкнутую ломаную, лежащую в плоскости, перпендикулярной одному из ребер коробки;

2) Гоша никогда не меняет направление движения по маршруту;

3) сумма чисел по всем квадратам, встречающимся на пути Гоши, не зависит от маршрута и равна 2880.

Какие числа написаны на гранях коробки?

120, 192, 216

4. Точки P, Q расположены на сторонах AB и AC треугольника ABC так, что $AP:PB = 2:1$, $AQ:QC = 1:3$. Точка M выбрана на стороне BC совершенно случайно. Найти вероятность того, что площадь треугольника ABC превосходит площадь треугольника PQM не более, чем в три раза. Найти математическое ожидание случайной величины — отношения площадей треугольников PQM и ABC .

$\frac{14}{7} = xM \left(\frac{5}{2} = (A) \right) (1)$

5. Представить число 2020 в виде суммы кубов пяти целых чисел. Доказать, что любое целое число можно представить в виде суммы кубов пяти целых чисел.

$2020 = 339^3 + 337^3 + (-338)^3 + (-338)^3 + (-2)^3$

6. В каком отношении $CE : CD$ точка E делит сторону CD основания правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, боковое ребро которой наклонено к основанию под углом 30° , если известно, что площадь треугольника SBE минимально возможная?

3 : 5