Олимпиада «Росатом» по математике

11 класс, 2020 год, комплект 2

1. Сколько существует натуральных чисел $n \leqslant 2020$, для которых дробь $\frac{6n^3+n^2-5n+12}{6n^2+7n+2}$ сократимая?

$\boxed{1299 \text{ чисел}}$

2. Решить уравнение $\sin\left(x(\eta(x)-\eta(x-7\pi)\right) = 1+\cos x$, где $\eta(x) = \begin{cases} 1, x \geqslant 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$

$\boxed{1)\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k = 0, 1, 2, 3;\ 2)\ x = \pi(2m+1),\ m \in \mathbb{Z}}$

3. Доказать, что для любого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами выражение $P(b)-P(a)$ делится на $(b-a)$ при любых целых a, b, $a \neq b$. Известно, что уравнение $P(x) = 8$ имеет целый корень на полуоси $x \geqslant 8$ и $P(4) = 17$. Найти этот корень.

$\boxed{x = 13}$

4. Петя, Вася и Иван каждый на своей карточке написал наугад по одной цифре и передали карточки Маше так, чтобы она не видела написанных цифр. Маша случайным образом перемешала карточки и выложила их в ряд на стол. Найти вероятность того, что на столе можно увидеть трехзначное число кратное 5, имеющее при делении на 7 остаток 3.

$\boxed{P = 0{,}026}$

5. Найти наименьшее положительное значение выражения $x+y$ для всех пар чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению $(\sin x + \cos y)(\cos x - siny) = 1 + \sin(x-y)\cos(x+y)$.

$\boxed{(x+y)_{\min} = 2\pi}$

6. Точка M — середина стороны AD параллелограмма $ABCD$. Прямая CM наклонена к основанию AD под углом 30°. Вершина B равноудалена от прямой CM и вершины A. Найти углы параллелограмма. Найти площадь параллелограмма, если длина основания AD равна 2.

$\boxed{1)\ 60^\circ,\ 120^\circ;\ 2)\ S_{ABCD} = \sqrt{3}}$