

Олимпиада «Росатом» по математике

11 класс, 2019 год, комплект 3

1. Робот умеет совершать маневры двух типов: шагать по прямой вперед на 510 шагов и останавливаться, а также проходить по той же прямой 390 шагов назад и останавливаться. Заряд батареи допускает не более 20 таких маневров. Задача робота — остановиться как можно ближе к объекту, расположенному впереди на расстоянии 692 шага от начального положения робота. На каком наименьшем расстоянии от объекта может остановиться робот (в шагах)? Сколько раз при этом робот совершит движение вперед и назад?

2. При каком значении a уравнение $|\sin(2x - y)| + |\cos(x + 2y)| + 1 = \frac{2a}{a^2 + 1}$ имеет решение? Найти эти решения. Найти минимальное R , при котором любой круг радиуса R на плоскости содержит хотя бы одну точку с координатами $(x; y)$ — решениями уравнения.

3. Ученикам на входе в школу разрешалось брать из коробки любое количество карандашей. Позже выяснилось, что не менее 60% карандашей, полученных любой группой из десяти человек, оказывались у одного ученика из этой группы. Доказать, что в школе есть ученик, забравший более 58% карандашей, взятых всеми школьниками из коробки.

4. На боковых ребрах DA и DB правильной треугольной пирамиды $ABCD$ совершенно случайно взяты точки M и N . Найти вероятность того, что площадь боковой поверхности пирамиды $MNCD$ с вершиной в точке D составляет не более половины площади боковой поверхности пирамиды $ABCD$.

5. При каких b система уравнений

$$\begin{cases} (x - a)^2 + (y - a + b)^2 = 2, \\ (x - y + 3)(x - y - 1) = 0, \end{cases}$$

имеет решения при любых a ?

6. На сторонах AB и BC треугольника ABC расположены точки M и N так, что $AM = CN = \sqrt{3}$. Точка P — середина отрезка MN , точка Q — середина стороны AC . Угол при вершине B треугольника ABC равен 60° . Найти длину отрезка PQ .