Олимпиада «Росатом» по математике

11 класс, 2018 год, комплект 2

1. Для каждого допустимого a найти наименьшее решение уравнения

$$2\log_a^2 x + \log_a x^3 - 3 = \log_x a^2.$$

2. Найти наименьшую длину отрезка числовой оси, содержащего три различных решения уравнения

$$\cos 2x - \sin 2x - \operatorname{ctg} 2x \cdot \sin x + \sin x = 0.$$

3. Решить уравнение $\{2\sin x\} + [\cos 2x] = 0$, где $[a]$ целая часть числа a — наибольшее целое число не превосходящее a, $\{a\}$ — дробная часть числа a: $\{a\} = a - [a]$.

4. Робот может совершать равные по длине шаги по дорожке вперед и назад, при этом выбор направления движения каждого шага является случайным и равновозможным. Робот сделал 10 шагов и остановился. Найти вероятность того, что он окажется на расстоянии более двух шагов от начала движения.

5. При каких a уравнение $4\sin^2 x + 4a\cos x - 5a = 0$ имеет решения на отрезке $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$?

6. Плоскости P и Q, параллельные основанию правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, пересекают ребро SA пирамиды в точках M и N. Длины отрезков SM, SN и SA являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии со знаменателем $q = 3$. Найти двугранный угол при основании пирамиды, если известно, что в усеченную пирамиду с плоскостями оснований P и Q можно вписать шар.