

## Олимпиада «Росатом» по математике

## 11 класс, 2018 год, комплект 1

1. Найти  $x$ , при которых числа  $\log_2(6 \sin x)$ ,  $\log_{2 \cos x}(6 \sin x)$  и  $\log_{2 \cos x} 4$  могут быть тремя последовательными членами геометрической прогрессии.

2. Найти решения  $(x; y)$  системы

$$\begin{cases} \sin(2x + y) = -1, \\ \cos(x - y) = 1 \end{cases}$$

в прямоугольнике  $-\pi \leq x \leq \pi/2$ ,  $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$ .

3. Отрезок  $[A; B]$  длины 5 движется на координатной плоскости так, что его концы лежат на параболе  $y = 2x^2$ . Точка  $M$  — середина отрезка  $[A; B]$ . Найти минимально возможное значение расстояния точки  $M$  до оси абсцисс, а также абсциссу точки  $M$ , при которой оно достигается.

4. Код замка состоит из трех цифр от 0 до 9. Замок открывается, если сумма цифр кода делится на 3. Найти вероятность того, что случайно набранный код откроет замок.

5. При каких  $a$  система уравнений

$$\begin{cases} \left| x \cos a + y \sin a - \frac{3}{\sqrt{2}} \right| + |y \cos a - x \sin a| = \frac{3}{\sqrt{2}}, \\ |x - y| + |x + y| = 8 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

6. В правильной четырехугольной пирамиде противоположные боковые грани перпендикулярны. Высота пирамиды равна  $h$ . Найти радиус шара, касающегося ребер основания и боковых ребер пирамиды или их продолжений.