Олимпиада «Росатом» по математике

11 класс, 2017 год, комплект 4

1. Отрезок $[2; 29]$ числовой оси разбит двумя точками a и b на три отрезка, длины которых x, y и z соответственно. Найти наибольшее возможное значение выражения $\log_3 x + \log_3 y + \log_3 z$.

2. Решить уравнение $\cos(\arcsin(\sin x)) = \sin(\arccos(\cos 2x))$.

3. Найти целые положительные делители x и y числа 1232, удовлетворяющие уравнению

$$5x - 3y + 13 = 0.$$

4. Игральная кость представляет собой кубик, на гранях которого отмечено другим цветом от одного до шести очков. Петя случайным образом бросает на стол три игральных кости одновременно и считает сумму числа очков, выпавших на всех костях. Каждое значение s этой суммы, расположенное от 3 до 18, может появиться с определенной вероятностью. Найти s, при котором эта вероятность максимально возможная.

5. Область D на координатной плоскости $k0b$ такова, что для любой точки $(k; b) \in D$ прямая с уравнением $y = kx + b$ имеет с треугольником ABC на координатной плоскости $x0y$ с вершинами $A(-1; 2)$, $B(2; 1)$, $C(-1; -5)$ хотя бы одну общую точку. Найти площадь пересечения D с полуполосой $k \in [-2; 5]$, $b \geqslant 0$. Для каждого $k \in [-2; 5]$ найти b, при котором прямая не пересекает треугольник.

6. На дуге, равной половине дуги окружности радиуса R, расположены 5 точек, являющихся вершинами выпуклого многоугольника. Найти периметр многоугольника, если известно, что сумма квадратов длин его сторон максимально возможная.