Олимпиада «Росатом» по математике

11 класс, 2017 год, комплект 3

1. Рациональные числа x и y таковы, что их логарифмы $\log_{\sqrt{2}} x$ и $\log_{\sqrt[3]{3}} y$ также рациональны и их сумма равна 73. Найти x и y.

2. Найти номера $n \geqslant 1$ членов арифметической прогрессии $a_n = \frac{5n+2}{3}$, являющихся решениями уравнения $\sqrt{10}\cos(\pi a_n) = \sqrt{4\cos(\pi a_n) - \cos(2\pi a_n)}$.

3. Целые положительные шестизначные числа a_1 и a_2 таковы, что если к сумме цифр числа a_1 прибавить сумму цифр числа a_2, то получится 36. Найти наибольшее возможное при этих условиях значение $a_1 \cdot a_2$.

4. Игральная кость имеет форму правильной четырехугольной пирамиды с двугранным углом $60°$ при основании. На боковых гранях пирамиды нарисованы цифры от 1 до 4, на основании — 5. Вероятность того, что при бросании кость ляжет на плоскость, закрывая определенную цифру, пропорциональна площади грани или основания с этой цифрой. Найти вероятность того, что сумма цифр, закрытых костью при трех бросаниях, равна 13.

5. При каких целых положительных n уравнение $\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x \cdot \ldots \cdot \sin nx = 0$ имеет не менее десяти решений на отрезке $[0; \pi/4]$?

6. На боковых ребрах EA, EB, EC правильной четырехугольной пирамиды $ABCDE$ расположены точки M, N, K соответственно, причем $EM : EA = 1 : 2$, $EN : EB = 2 : 3$, $EK : EC = 1 : 3$. В каком отношении делит объем пирамиды плоскость, проходящая через точки M, N, K?