Олимпиада «Росатом» по математике

11 класс, 2017 год, комплект 2

1. При каких натуральных n уравнение $\log_2 x + \log_2 x^3 + \log_2 x^5 + \ldots + \log_2 x^{2n-1} = 5040$ имеет рациональное решение?

2. Найти наибольшее значение выражения $|x| + |y| + |z|$ для троек $(x; y; z)$, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} \sin x \cdot \sin(x+y) \cdot \sin(x+y+z) = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = \dfrac{\pi^2}{3}. \end{cases}$$

Найти тройки $(x; y; z)$, для которых наибольшее значение достигается.

3. Целые числа $2a^2$ и $3a$ имеют одинаковые остатки при делении на 18. Какие ненулевые остатки может иметь число $a > 0$ при делении на 18?

4. Через случайно выбранные три вершины куба с ребром 2 проводится плоскость. Найти вероятность того, что площадь сечения превзойдет 5. Допускается, что эти вершины принадлежат одной грани куба.

5. Целое число n таково, что $\cos\frac{(2n^2+n+1)\pi}{2} = 1$, а уравнение $\sin x \cdot \sin 5x \cdot \sin nx = 1$ имеет решение. Найти все такие n.

6. Две параллельные прямые, расстояние между которыми 1, пересекают прямоугольник размерами 3×5 под углом $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$ к его стороне. Найти максимальное возможное значение суммы длин отрезков этих прямых, принадлежащих прямоугольнику.