Олимпиада «Росатом» по математике

11 класс, 2017 год, комплект 1

1. Для каждой пары целых, положительных чисел (m, n), связанных соотношением

$$3m + 2n = 19,$$

найти решение x уравнения

$$2^{r_n x} + r_m \cdot 2^x - 8 = 0,$$

где r_k — остаток от деления k на 3.

2. Найти все x, для которых

$$\sin a_n x + \sin a_{n+1} x + \sin a_{n+2} x = 0$$

при всех n, где a_n — арифметическая прогрессия с разностью $d = \pi/10$ и первым членом $a_1 = \pi/2$.

3. Сколько существует различных, целых, положительных, двенадцатиразрядных чисел, делящихся на 9, в записи которых используется две цифры 3 и 4?

4. Случайно выбранное шестизначное целое положительное число оканчивается на 32. Найти вероятность того, что оно делится на 14.

5. При каких значениях a система

$$\begin{cases} 2[x] - 3[y] = 7, \\ 3x + 2y = a \end{cases}$$

имеет единственное решение? Здесь $[z]$ — целая часть числа z — наибольшее челое число, не превосходящее z.

6. Через ребро AB основания правильной четырехугольной пирамиды $EABCD$ проведена плоскость P, пересекающая ребра EC и ED в точках M и N соответственно. Плоскость P делит объем пирамиды в отношении $V_{EABMN} : V_{EABCD} = 5 : 9$. Найти отношение площадей полных поверхностей пирамид $S_{EABMN} : S_{EABCD}$, если боковые грани пирамиды $EABCD$ наклонены к плоскости основания $ABCD$ под углом $\alpha = \operatorname{arctg} 5$.