

## Олимпиада «Росатом» по математике

11 класс, 2016 год

1. Сколько пар  $(x; y)$  целых чисел, являющихся решениями уравнения  $7x - 5y = 23$ , удовлетворяют неравенству  $x^2 + y^2 \leq 37$ ? Найти пару  $(x; y)$ , для которой  $x + y$  наибольшее.

2. Найти  $x$ , при котором выражение  $(\sin^2 x - \cos x - 1/4)^2 + (\cos 2x + \cos x)^2$  принимает наименьшее значение.

3. Для квадратного трехчлена  $P_1(x) = x^2 - x - 6$  и натурального числа  $n$  определим многочлены  $P_2(x) = P_1(2x)$ ,  $P_3(x) = P_2(2x)$ , ...,  $P_n(x) = P_{n-1}(2x)$ . Решить уравнение  $P_n(x) = 0$  и найти сумму корней многочлена

$$Q_n(x) = P_1(x) + P_2(x) + \dots + P_n(x).$$

4. Петя и Вова играют в кости на фантики. Ведущий игру Петя выигрывает, если при бросании им двух игральных кубиков сумма выпавших на них очков не превосходит 4 и проигрывает во всех остальных случаях. Проиграв, Петя отдаёт Вове 1 фантик, выиграв — получает от Вовы  $k$  фантиков. Игра считается справедливой, если среднее значение выигрыша каждым игроком равна нулю. Найти значение  $k$ , при котором игра будет справедливой?

5. Функция

$$\chi(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } t > 0, \\ 0, & \text{при } t \leq 0. \end{cases}$$

При каких значениях  $a$  система

$$\begin{cases} x \cdot \chi(x - a) + y \cdot \chi(y - 2a) = 5a, \\ x + 2y = 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

6. В прямоугольнике  $ABCD$  со сторонами  $AD = 8$ ,  $AB = 4$  расположены три круга  $K$ ,  $K_1$  и  $K_2$ . Круг  $K$  касается кругов  $K_1$ ,  $K_2$  внешним образом, а также прямых  $AD$  и  $BC$ . Круги  $K_1$ ,  $K_2$  касаются также сторон  $AD$ ,  $AB$  и  $AD$ ,  $CD$  соответственно. Найти максимальное возможное значение суммы площадей трех кругов.