

## Олимпиада «Физтех» по математике

### 10 класс, 2024 год, вариант 2

1. В прямоугольном треугольнике длины катетов равны  $|2x - 2|$  и  $|x^2 + 3x|$ , а длина гипотенузы равна  $|3x + 1|$ . Найдите  $x$ .

$$\boxed{x^2 - 7x - 2 = 0}$$

2. Целые числа  $x, y, z$  удовлетворяют равенству  $x\sqrt{8} + y\sqrt{18} + z\sqrt{29} = \sqrt{32} + \sqrt{116}$ . Найдите наименьшее возможное значение выражения  $x^2 - y^2 + z^2$ .

$$\boxed{1}$$

3. Назовём числа *хорошими*, если они представимы в виде  $a(a + 1)$ , где  $a \in \mathbb{N}$ . Найдите количество пар хороших чисел, разность которых равна  $81 \cdot 10^{2024}$ .

$$\boxed{10125}$$

4. Решите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{4x - x^2} - 3} \leq \frac{1}{\sqrt{2x - x^2} - \sqrt{x^2 + x - 2}}.$$

$$\boxed{\{x\} \cap \left(\frac{1}{2\sqrt{11}}; 1\right] \neq \emptyset}$$

5. Остроугольный треугольник  $ABC$  вписан в окружность с центром  $O$ , а  $AA_1$  и  $BB_1$  — его высоты. Найдите расстояние от точки  $O$  до стороны  $AC$ , если  $AB_1 = 6$  и площадь треугольника  $OBA_1$  равна 6.

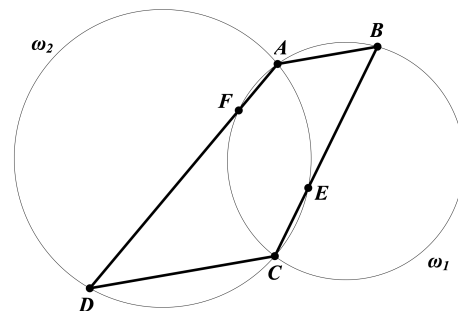
$$\boxed{2}$$

6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + y^3 - 3y^2 - 1 = 0, \\ 2x - xy - y^3 + 5y^2 - 3y + 2 = 0. \end{cases}$$

$$\boxed{\left(\frac{2}{\sqrt{17}-3}; \sqrt{17}-2\right); \left(\frac{2}{\sqrt{17}+3}; \sqrt{17}+2\right); (4); (3); (0); (-)}$$

7. Дана трапеция  $ABCD$  с основаниями  $AB$  и  $CD$  ( $AB < CD$ ). Окружность  $\omega_1$ , описанная около треугольника  $ABC$ , повторно пересекает сторону  $AD$  в точке  $F$ , а окружность  $\omega_2$ , описанная около треугольника  $ACD$ , повторно пересекает сторону  $BC$  в точке  $E$  (точки  $E$  и  $F$  расположены так, как показано на рисунке). Найдите отношение длин отрезков  $AF$  и  $CE$ , если отношение радиуса окружности  $\omega_1$  к радиусу окружности  $\omega_2$  равно  $1 : 2$ .



1 : 2