

Олимпиада «Физтех» по математике

10 класс, 2023/24 год, онлайн-этап, попытка 2

1. Дана возрастающая арифметическая прогрессия $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$. Известно, что

$$a_3 + a_6 = 23, \quad a_6^2 - a_3^2 = 207.$$

Чему равен девятый член прогрессии?

27

2. Пусть $\Pi(k)$ обозначает произведение всех цифр натурального числа k . Найдите наименьшее пятизначное число n такое, что

$$\Pi(n) = \Pi(n + 1) = \Pi(n + 2) < \Pi(n + 3) = 648.$$

80668

3. 20 школьников записываются на кружки по физике, математике и информатике. Каждый школьник может записаться на любое количество из этих трёх кружков, но обязан выбрать хотя бы один из них. Известно, что на информатику записались 13 школьников, на физику — 10 школьников, а 9 человек записались на математику. Оказалось, что ровно 9 человек записались не менее чем на 2 кружка сразу. Найдите количество учеников, выбравших все три кружка.

3

4. Пункты A и B находятся на шоссе на расстоянии 70 километров друг от друга. В полдень из пункта A в направлении пункта B выезжает мотоцикл (его движение не заканчивается в пункте B). Он едет с постоянной скоростью 50 км/ч. Одновременно вместе с мотоциклом из пункта B выезжает машина, которая движется **в том же направлении вдоль шоссе, что и мотоцикл**. Машина начинает движение с нулевой скоростью и движется с постоянным ускорением 40 км/ч². Определите наименьшее расстояние между машиной и мотоциклом в первые два часа движения. Ответ выразите в километрах.

38,75

5. В ромбе $ABCD$ с острым углом A продолжение высоты, опущенной из вершины B на сторону AD , пересекает прямую CD в точке P . Известно, что высота ромба равна 1, а $CP = \frac{9}{2\sqrt{2}}$. Найдите длину стороны ромба, если известно, что это целое число.

3

6. Для какого наибольшего числа N существуют такие числа m и k , что $N = m + k$, а уравнения

$$x^3 - 11x = m \quad \text{и} \quad x^2 - 2x = k$$

имеют два общих корня?

21

7. Известно, что при некоторых x и y ровно два из четырёх чисел

$$x - 2y - 2,5; \quad 2x - y - 3; \quad x^2 - 2x + y^2 + y + 3; \quad x^2 - x + y^2 + 2y + 2,5$$

равны между собой. Найдите наибольшее возможное значение выражения $x + y$.

1-

8. В треугольнике ABC с острыми углами при вершинах A и B проведена высота CH . Точки M и N — середины сторон AC и BC соответственно. Площадь треугольника AHM равна 90, а радиус вписанной в него окружности равен $\frac{18}{5}$. Площадь треугольника BHN равна 420, а радиус вписанной в него окружности равен $\frac{42}{5}$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC .

9*81

9. В каждую клетку доски 24×30 клеток поставили либо чёрную, либо белую шашку. Оказалось, что в любом «уголке» из 3 клеток стоит хотя бы одна чёрная шашка. Какое наибольшее количество белых шашек может стоять на доске?

09E

10. За круглый стол сели 90 мудрецов. Каждый из них взял карточку и записал на ней целое ненулевое число. Оказалось, что у каждого мудреца число на карточке больше произведения чисел на карточках трёх ближайших мудрецов, сидящих справа от него. Какое наибольшее количество положительных чисел может быть выписано на карточках мудрецов?

09