

## Олимпиада «Физтех» по математике

## 11 класс, 2023/24 год, онлайн-этап, попытка 1

1. Три натуральных числа являются последовательными членами арифметической прогрессии. Если ко второму прибавить 2, а к третьему прибавить 12, то получатся три последовательных члена геометрической прогрессии. Чему равна сумма трёх данных чисел, если знаменатель геометрической прогрессии равен 3?

17

2. Первый пешеход отправился из пункта  $A$  в пункт  $B$ , и одновременно с ним второй пешеход отправился из пункта  $B$  в пункт  $A$ . Они встретились через 3 часа. Известно, что второму пешеходу на прохождение 19% пути  $AB$  требуется на  $\frac{21}{25}$  часа больше, чем первому пешеходу на прохождение  $\frac{1}{11}$  пути  $AB$ . За сколько часов пройдёт путь  $AB$  первый пешеход?

28.5

3. Найдите наименьшее целое значение параметра  $a$ , при котором уравнение

$$5 \sin^2 x - 2a \sin x \cos x + 8 \cos^2 x = 4$$

не имеет решений.

11

4. Сколько есть способов расставить 6 книг в шкафу с 10 полками так, чтобы 4 заданные книги из этих 6 стояли на одной полке рядом друг с другом (в любом порядке), если расстановки, отличающиеся порядком книг на полке, считаются различными?

0891E

5. На рёбрах  $SA$ ,  $SB$  треугольной пирамиды  $SABC$  отмечены точки  $Q$ ,  $P$  соответственно, причём  $SQ : QA = 3 : 5$  и  $SP : PB = 1 : 5$ ;  $R$  — точка пересечения медиан треугольника  $ABC$ . Плоскость  $PQR$  пересекает ребро  $BC$  в точке  $D$ . Найдите длину отрезка  $CD$ , если известно, что длина  $BC = 7$ .

4

6. Про квадратичную функцию  $f(x) = ax^2 + bx + 2$  известно, что

$$a < 0 \quad \text{и} \quad f(7) = 0.$$

Какое наибольшее количество целых чисел может быть решением неравенства  $ax^4 + bx^2 + 2 > 0$ ?

5

7. Внутри прямоугольника  $PQST$  расположены окружности  $\Omega$  и  $\omega$ , касающиеся друг друга в точке  $C$ . Известно, что окружность  $\Omega$  касается сторон  $PQ$ ,  $PT$ ,  $ST$ , а окружность  $\omega$  — сторон  $PQ$  и  $QS$ ; кроме того, прямая  $CS$  является общей касательной к окружностям. Найдите радиус  $R$  окружности  $\Omega$ , если известно, что радиус окружности  $\omega$  есть  $r = 3$ . Ответ округлите до трёх знаков после запятой.

7,854

8. Про многочлен

$$q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6$$

известно, что каждый из коэффициентов  $a_0, \dots, a_6$  по модулю равен 0, 1 или 2, а значение  $q(3) = 546$ . Найдите максимально возможное значение  $q(4)$ .

3548

9. За круглый стол сели 138 мудрецов. Часть из них в синих колпаках, остальные — в красных. Известно, что среди любых пяти мудрецов, сидящих подряд, найдутся по крайней мере двое в красных колпаках. Какое наименьшее количество мудрецов может быть в красных колпаках?

56

10. Угол  $A$  остроугольного треугольника  $ABC$  равен  $60^\circ$ , а  $AB > AC$ . Пусть  $I$  — точка пересечения биссектрис, а  $H$  — точка пересечения высот этого треугольника. Найдите  $\angle ABC$ , если  $\angle AHI = 78^\circ$ . Ответ укажите в градусах.

52